ALMA MATER STUDIORUM
UNIVERSITÀ DI BOLOGNA

Università di Bologna - Scuola di Scienze

Esame scritto di Calcolo delle Probabilità e Statistica
18 settembre 2019

Esercizio 1

Un'urna contiene una pallina rossa ed una bianca. Si effettuano due estrazioni con reimmissione e con rinforzo delle sole rosse. Più precisamente, a seguito di ogni estrazione, se la pallina estratta è rossa, la si reinserisce nell'urna insieme ad un'altra pallina rossa; al contrario, se la pallina estratta è bianca, la si reinserisce nell'urna senza aggiungere altre palline. Si calcoli la probabilità

1) che la seconda pallina estratta sia bianca, sapendo che la prima è bianca,

2) che la seconda pallina estratta sia bianca,

3) che almeno una delle due palline estratte sia bianca,

4) che la prima pallina sia bianca, sapendo che la seconda è bianca.

Soluzione

Consideriamo gli eventi

$$\begin{aligned} B_k &= \text{"la } k\text{-esima pallina estratta è bianca"} \\ R_k &= \text{"la } k\text{-esima pallina estratta è rossa"} = B_k^c, \end{aligned}$$

dove $k = 1, 2$.

1) $\mathbb{P}(B_2|B_1) = \frac{1}{2}$

2) Per la formula delle probabilità totali, abbiamo che

$$\mathbb{P}(B_2) = \mathbb{P}(B_2|B_1)P(B_1) + \mathbb{P}(B_2|R_1)\mathbb{P}(R_1) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{5}{12}.$$

3)

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(B_1 \cup B_2) &= \mathbb{P}(B_1) + \mathbb{P}(B_2) - \mathbb{P}(B_1 \cap B_2) = \mathbb{P}(B_1) + \mathbb{P}(B_2) - \mathbb{P}(B_2|B_1)\,\mathbb{P}(B_1) \\ &= \frac{1}{2} + \frac{5}{12} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{2}{3}. \end{aligned}$$

4) Per la formula di Bayes

$$\mathbb{P}(B_1|B_2) = \frac{\mathbb{P}(B_2|B_1)\,\mathbb{P}(B_1)}{\mathbb{P}(B_2)} = \frac{3}{5}.$$

Esercizio 2

Sia X una variabile aleatoria discreta tale che

X	0	1	2
p_X	p	$1-p-p^2$	p^2

dove p è un parametro reale.

1) Per quali valori del parametro p si ha che p_X è effettivamente una densità discreta?

D'ora in poi si ponga $p = \frac{1}{2}$. Siano X_1 ed X_2 due variabili aleatorie discrete indipendenti e identicamente distribuite, aventi la stessa distribuzione di X. Poniamo

$$\begin{aligned} Y &= X_1 + X_2, \\ Z &= 1_{\{X_1 \geq 1\}} + 1_{\{X_2 \geq 1\}}. \end{aligned}$$

2) Determinare la distribuzione di Y.

3) Determinare la distribuzione di Z.

4) Calcolare $\mathrm{Cov}(Y, Z)$.

Soluzione

1)

$$\begin{cases} 0 \le p \le 1 \\ 0 \le 1 - p - p^2 \le 1 \\ 0 \le p^2 \le 1 \end{cases} \qquad \Longleftrightarrow \qquad 0 \le p \le \frac{\sqrt{5}-1}{2}.$$

2) X_1 e X_2, essendo indipendenti, hanno densità discreta congiunta data dal prodotto delle marginali:

$X_1 \backslash X_2$	0	1	2
0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$
1	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$
2	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$

Di conseguenza, $Y = X_1 + X_2$ ha densità discreta

Y	0	1	2	3	4
p_Y	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{5}{16}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{16}$

3)

Z	0	1	2
p_Z	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

In particolare, Z ha distribuzione binomiale: $Z \sim B(2, 1/2)$.

4)

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[Y] &= \sum_{i=0}^{4} i\, p_Y(i) = \frac{3}{2}, \\ \mathbb{E}[Z] &= \sum_{j=0}^{2} j\, p_Z(j) = 1, \\ \mathbb{E}[YZ] &= \mathbb{E}\big[\big(X_1 + X_2\big)\big(1_{\{X_1 \ge 1\}} + 1_{\{X_2 \ge 1\}}\big)\big] \\ &= \sum_{\substack{i=0,1,2 \\ j=0,1,2}} \big(i+j\big)\big(1_{\{i \ge 1\}} + 1_{\{j \ge 1\}}\big)\, p_{(X_1,X_2)}(i,j) = \frac{9}{4}. \end{aligned}$$

Quindi $\mathrm{Cov}(Y,Z) = \mathbb{E}[YZ] - \mathbb{E}[Y]\mathbb{E}[Z] = \frac{3}{4}$.

Esercizio 3

Sia X una variabile aleatoria continua con funzione di ripartizione

$$F_X(x) \;=\; \begin{cases} 0, & x < -\frac{1}{4}, \\ \dfrac{1}{3}x + \dfrac{1}{12}, & -\frac{1}{4} \leq x < a, \\ x^2, & a \leq x < b, \\ 1, & x \geq b, \end{cases}$$

dove a e b sono parametri reali strettamente positivi.

1) Dire per quali valori dei parametri a e b la funzione F_X è effettivamente la funzione di ripartizione di una variabile aleatoria continua.

2) Determinare la densità di X.

3) Calcolare $\mathbb{E}[X]$ e $\mathbb{P}(1/4 < X \leq 3/4)$.

4) Posto $Y = \frac{1}{1+X}$, determinare la funzione di ripartizione di Y.

Soluzione

1) $a = \frac{1}{2}$ e $b = 1$. Infatti, se F_X è la funzione di ripartizione di una variabile aleatoria continua allora è continua ovunque, quindi anche nei punti $x = a$ e $x = b$. Questo è vero se e solo se

$$\begin{cases} \dfrac{1}{3}\,a + \dfrac{1}{12} \;=\; a^2, \\ b^2 \;=\; 1. \end{cases}$$

Abbiamo che

$$\begin{cases} \dfrac{1}{3}\,a + \dfrac{1}{12} \;=\; a^2, \\ b^2 \;=\; 1 \end{cases} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \begin{cases} a \;=\; -\dfrac{1}{6} \quad \vee \quad a \;=\; \dfrac{1}{2}, \\ b \;=\; -1 \quad \vee \quad b \;=\; 1. \end{cases}$$

Dato che a e b devono essere strettamente positivi, otteniamo $a = \frac{1}{2}$ e $b = 1$. Per tali valori di a e b si verifica che la funzione F_X, oltre ad essere continua (e quindi, a maggior ragione, continua da destra), soddisfa anche le altre proprietà di una funzione di ripartizione:

- F_X è monotona crescente (non necessariamente strettamente).
- $\lim_{x\to-\infty} F_X(x) = 0$.
- $\lim_{x\to+\infty} F_X(x) = 1$.

2)

$$f_X(x) \;=\; \begin{cases} \dfrac{1}{3}, & -\frac{1}{4} \le x \le \frac{1}{2}, \\ 2\,x, & \frac{1}{2} < x \le 1, \\ 0, & \text{altrove.} \end{cases}$$

3)

$$\mathbb{E}[X] \;=\; \int_{-\infty}^{+\infty} x\, f_X(x)\,\mathrm{d}x \;=\; \int_{-1/4}^{1/2} \frac{x}{3}\,\mathrm{d}x + \int_{1/2}^{1} 2\,x^2\,\mathrm{d}x \;=\; \frac{1}{32} + \frac{7}{12} \;=\; \frac{59}{96},$$

$$\mathbb{P}(1/4 < X \le 3/4) \;=\; F_X(3/4) - F_X(1/4) \;=\; \frac{9}{16} - \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{4} - \frac{1}{12} \;=\; \frac{19}{48}.$$

4) La funzione di ripartizione di Y è data da

$$F_Y(x) \;=\; \mathbb{P}(Y \le x) \;=\; \mathbb{P}\biggl(\frac{1}{1+X} \le x\biggr) \;=\; \mathbb{P}\biggl(1 + X \ge \frac{1}{x}\biggr) \;=\; \mathbb{P}\biggl(X \ge \frac{1}{x} - 1\biggr)$$
$$= \; 1 - F_X\biggl(\frac{1}{x} - 1\biggr).$$

Quindi

$$F_Y(x) = \begin{cases} 0, & x < \frac{1}{2}, \\ 1 - \left(\dfrac{1}{x} - 1\right)^2, & \frac{1}{2} \le x < \frac{2}{3}, \\ \dfrac{5}{4} - \dfrac{1}{3x}, & \frac{2}{3} \le x < \frac{4}{3}, \\ 1, & x \ge \frac{4}{3}. \end{cases}$$

Esercizio 4

Si consideri la catena di Markov $(X_n)_{n\geq 1}$ con spazio degli stati $\mathcal{S} = \{1,2,3,4,5,6\}$, associata alla seguente matrice di transizione:

$$\Pi = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 & \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{3}{4} & 0 & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}.$$

1) Disegnare il corrispondente grafo orientato.

2) Determinare le classi comunicanti.

3) Sapendo che all'istante $n = 1$ la catena di Markov si trova nello stato 2, qual è la probabilità che la catena si trovi nello stato 5 all'istante $n = 4$?

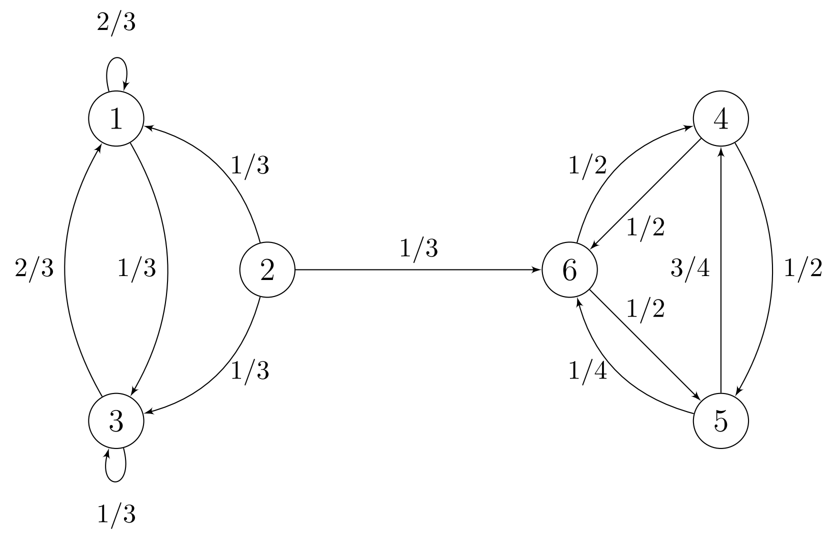
4) Sapendo che X_1 ha la seguente densità discreta

X_1	1	2	3	4	5	6
p_{X_1}	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{4}$	0

determinare la probabilità che all'istante $n = 3$ la catena di Markov si trovi nello stato 4.

Soluzione

1)



2) $\{1,3\}$, $\{2\}$, $\{4,5,6\}$.

3) Viene richiesto di calcolare $\pi_{25}^{(3)}$. A partire dal grafo orientato, abbiamo che

$$\pi_{25}^{(3)} = \underbrace{\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}}_{\text{prob. cammino } 2\to 6\to 4\to 5} = \frac{1}{12}.$$

4) Dobbiamo calcolare la probabilità $\mathbb{P}(X_3 = 4)$, che è data da

$$\mathbb{P}(X_3 = 4) = \sum_{i=1}^{6} p_{X_1}(i)\,\pi_{i4}^{(2)} = \frac{1}{4}\big(\pi_{14}^{(2)} + \pi_{24}^{(2)} + \pi_{34}^{(2)} + \pi_{54}^{(2)}\big).$$

Abbiamo che

$$\begin{aligned}
\pi_{14}^{(2)} &= 0,\\
\pi_{24}^{(2)} &= \underbrace{\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}}_{\text{prob. cammino } 2\to 6\to 4} = \frac{1}{6},\\
\pi_{34}^{(2)} &= 0,\\
\pi_{54}^{(2)} &= \underbrace{\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2}}_{\text{prob. cammino } 5\to 6\to 4} = \frac{1}{8}.
\end{aligned}$$

Quindi $\mathbb{P}(X_3 = 4) = \frac{7}{96}$.