ALMA MATER STUDIORUM
UNIVERSITÀ DI BOLOGNA

Università di Bologna - Scuola di Scienze

Esame scritto di Calcolo delle Probabilità e Statistica
23 luglio 2019

Esercizio 1

Il dado A ha quattro facce rosse e due bianche, mentre il dado B ha due facce rosse e quattro bianche. Si lancia una sola volta una moneta. Se esce testa il gioco continua con il dado A, altrimenti si usa il dado B. Il dado così scelto viene lanciato due volte.

1) Quanto vale la probabilità che al primo lancio del dado esca una faccia rossa, sapendo che è uscito testa?

2) Si calcoli la probabilità che al primo lancio del dado esca una faccia rossa.

3) Se nel primo lancio del dado si ottiene una faccia rossa, qual è la probabilità che sia rossa anche al secondo lancio?

4) Se nei due lanci del dado si ottiene sempre una faccia rossa, qual è la probabilità che sia stato usato il dado A?

Soluzione

Introduciamo gli eventi:

$$\begin{aligned}
A &= \text{“esce testa, ovvero si usa il dado } A\text{”},\\
B &= \text{“esce croce, ovvero si usa il dado } B\text{”} \;=\; A^c,\\
R_n &= \text{“esce una faccia rossa all'}n\text{-esimo lancio del dado”},\\
B_n &= \text{“esce una faccia bianca all'}n\text{-esimo lancio del dado”} \;=\; R_n^c,
\end{aligned}$$

per $n = 1, 2$.

1) $\mathbb{P}(R_1|A) = \frac{2}{3}$.

2) Per la formula delle probabilità totali, abbiamo che

$$\mathbb{P}(R_1) \;=\; \mathbb{P}(R_1|A)P(A) + \mathbb{P}(R_1|B)\mathbb{P}(B) \;=\; \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2} \;=\; \frac{1}{2}.$$

3) Dobbiamo calcolare la probabilità condizionale

$$\mathbb{P}(R_2|R_1) \;=\; \frac{\mathbb{P}(R_1\cap R_2)}{\mathbb{P}(R_1)} \;=\; \frac{\mathbb{P}(R_1\cap R_2)}{\frac{1}{2}} \;=\; 2\,\mathbb{P}(R_1\cap R_2).$$

Calcoliamo $\mathbb{P}(R_1\cap R_2)$ con la formula delle probabilità totali:

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(R_1\cap R_2) &= \mathbb{P}(R_1\cap R_2|A)\,\mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(R_1\cap R_2|B)\,\mathbb{P}(B)\\
&= \frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2} \;=\; \frac{5}{18}.
\end{aligned}$$

Quindi $\mathbb{P}(R_2|R_1) = \frac{5}{9}$.

4) Per la formula di Bayes

$$\mathbb{P}(A|R_1\cap R_2) \;=\; \frac{\mathbb{P}(R_1\cap R_2|A)\,\mathbb{P}(A)}{\mathbb{P}(R_1\cap R_2)} \;=\; \frac{\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}}{\frac{5}{18}} \;=\; \frac{4}{5}.$$

Esercizio 2

Nella risoluzione di equazioni algebriche che discendono da problemi reali si ha spesso a che fare con coefficienti soggetti a incertezza. Si consideri ad esempio il problema di trovare le soluzioni della seguente equazione algebrica nell'incognita x:

$$x^2 - 2x + Z \ = \ 0.$$

Il termine noto, indicato con Z, è una variabile aleatoria con distribuzione uniforme discreta sull'insieme $\{0, \frac{9}{25}, \frac{3}{4}\}$.

1) Si mostri che, con probabilità 1, l'equazione ammette due radici reali e distinte, che indicheremo X e Y (X è la più grande, Y la più piccola).

2) Qual è la densità discreta di X?

3) X e Y sono indipendenti?

4) Calcolare $\mathbb{E}[X]$, $\mathbb{E}[Y]$, $\mathbb{E}[XY]$ e $\mathrm{Cov}(X, Y)$.

Soluzione

1) Abbiamo che

$$X = 1 + \sqrt{1-Z}, \qquad\qquad Y = 1 - \sqrt{1-Z}.$$

Poiché risulta $\mathbb{P}(Z < 1) = 1$, X e Y sono reali e distinte.

2) Sappiamo che

Z	0	$\frac{9}{25}$	$\frac{3}{4}$
p_Z	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$

Quindi

X	$\frac{3}{2}$	$\frac{9}{5}$	2
p_X	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$

3) No, infatti ad esempio $\mathbb{P}(X = 3/2, Y = 0) \neq \mathbb{P}(X = 3/2)\mathbb{P}(Y = 0)$ dato che $\mathbb{P}(X = 3/2, Y = 0) = 0$, mentre $\mathbb{P}(X = 3/2) \neq 0$ e $\mathbb{P}(Y = 0) \neq 0$.

4)

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[X] &= \frac{1}{3}\left(\frac{3}{2} + \frac{9}{5} + 2\right) = \frac{53}{30}, \\ \mathbb{E}[Y] &= \frac{1}{3}\left(0 + \frac{1}{5} + \frac{1}{2}\right) = \frac{7}{30}. \end{aligned}$$

Si noti che $XY = Z$, quindi

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[XY] &= \mathbb{E}[Z] = \frac{37}{100}, \\ \mathrm{Cov}(X,Y) &= \mathbb{E}[XY] - \mathbb{E}[X]\,\mathbb{E}[Y] = -\frac{19}{450}. \end{aligned}$$

Esercizio 3

Sia X una variabile aleatoria continua con densità

$$f_X(x) \; = \; \begin{cases} C\,\mathrm{e}^x, & x < 0, \\ \dfrac{C}{(1+x)^4}, & x \geq 0, \end{cases}$$

dove C è un parametro reale.

1) Dire per quale valore del parametro C la funzione f_X è effettivamente una densità continua.

D'ora in poi si ponga C uguale al valore trovato.

2) Determinare la funzione di ripartizione di X.

3) Si consideri la variabile aleatoria discreta $Y = 1_{\{X \geq 1\}}$. Determinare supporto e densità discreta di Y.

Sia ora $(X_n)_{n\geq 1}$ una successione di variabili aleatorie i.i.d. tutte aventi la stessa distribuzione di X. Per ogni $n \geq 1$, poniamo

$$Y_n \; = \; 1_{\{X_n \geq 1\}}.$$

4) Calcolare $\mathbb{P}(Y_1 + \cdots + Y_{1000} \geq 36)$ in modo approssimato, facendo uso del teorema centrale del limite. [Si esprima il risultato nella forma $1 - \Phi(x)$, per qualche $x > 0$]

Soluzione

1) La risposta è $C = \frac{3}{4}$. Infatti, f_X è una densità continua se e solo se

- $f_X(x) \geq 0$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$;
- $\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)\,\mathrm{d}x = 1$.

La prima proprietà è vera se e solo se $C \geq 0$. La seconda proprietà, invece, è verificata se e solo se $C = \frac{3}{4}$, infatti

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)\,\mathrm{d}x \;=\; C\int_{-\infty}^{0} \mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x + C\int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+x)^4}\,\mathrm{d}x \;=\; \frac{4}{3}\,C.$$

2)

$$F_X(x) \;=\; \int_{-\infty}^{x} f_X(y)\,\mathrm{d}y \;=\; \begin{cases} \dfrac{3}{4}\,\mathrm{e}^x, & x \leq 0, \\ 1 - \dfrac{1}{4(1+x)^3}, & x \geq 0. \end{cases}$$

3) Y ha distribuzione bernoulliana, quindi $\mathcal{S}_Y = \{0, 1\}$. Per quanto riguarda la densità discreta abbiamo che

$$p_Y(1) \;=\; \mathbb{P}(Y = 1) \;=\; \mathbb{P}(X \geq 1) \;=\; 1 - F_X(1) \;=\; \frac{1}{32}.$$

In conclusione

Y	0	1
p_Y	$\frac{31}{32}$	$\frac{1}{32}$

4) Il risultato è $1 - \Phi(0.8633) \simeq 19.4\%$. Infatti, siano $\mu = \mathbb{E}[Y] = \frac{1}{32}$, $\sigma^2 = \mathrm{Var}(Y) = \frac{31}{32^2}$ e

$$\bar{Y}_n \;=\; \frac{Y_1 + \cdots + Y_n}{n},$$
$$\bar{Z}_n \;=\; \frac{\bar{Y}_n - \mu}{\sigma/\sqrt{n}}.$$

Per il teorema centrale del limite si ha che $\bar{Z}_n$ ha approssimativamente distribuzione normale standard, quindi

$$\mathbb{P}(Y_1 + \cdots + Y_{1000} \geq 36) \;=\; \mathbb{P}(\bar{Y}_{1000} \geq 0.036) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{standardizzazione}}}{=} \mathbb{P}\left(\bar{Z}_{1000} \geq \frac{0.036 - \frac{1}{32}}{\frac{\sqrt{31}}{32}\cdot\frac{1}{\sqrt{1000}}}\right)$$
$$\simeq\; \mathbb{P}(\bar{Z}_{1000} \geq 0.8633) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{TCL}}}{\simeq} 1 - \Phi(0.8633) \;\simeq\; 0.1940.$$

Esercizio 4

Due giocatori A e B lanciano a turno due monete (non truccate):

- se entrambi gli esiti sono *testa*, il giocatore che ha lanciato le monete vince;
- se entrambi gli esiti sono *croce*, il giocatore che ha tirato passa le monete all'altro giocatore;
- se le facce sono diverse, il giocatore che ha tirato può lanciare un'altra volta.

Il gioco prosegue fino a quando uno dei due giocatori vince. Sia

$$X_n \ = \ \text{“stato del gioco”}, \qquad \forall\, n \geq 1,$$

dove lo stato 1 sta per "ha vinto il giocatore A", lo stato 2 sta per "deve tirare il giocatore A", lo stato 3 sta per "deve tirare il giocatore B" e lo stato 4 sta per "ha vinto il giocatore B".

1) La successione $(X_n)_{n\geq 0}$ è una catena di Markov a tempo discreto. Determinare matrice di transizione e grafo orientato.

2) Quali sono le classi comunicanti?

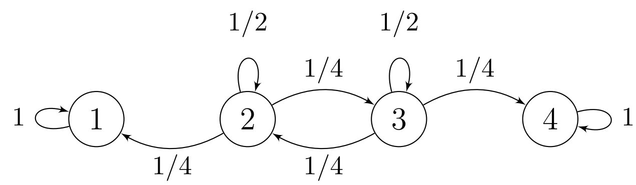
3) Qual è la probabilità di andare dallo stato 1 allo stato 3 in due passi?

4) Supponiamo che tiri per primo il giocatore A: qual è la probabilità che A vinca entro al massimo tre lanci?

Soluzione

1)

$$
\Pi \; = \; \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}
$$



2) $\{1\}$, $\{2,3\}$, $\{4\}$.

3) $\pi_{13}^{(2)} = 0$.

4) Dobbiamo calcolare $\pi_{21}^{(3)}$. A partire dal grafo orientato, abbiamo che

$$
\begin{aligned}
\pi_{21}^{(3)} \;=\; & \underbrace{\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4}}_{\text{prob. cammino } 2\to3\to2\to1} \;+\; \underbrace{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}}_{\text{prob. cammino } 2\to2\to2\to1} \\
& + \underbrace{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}\cdot 1}_{\text{prob. cammino } 2\to2\to1\to1} \;+\; \underbrace{\frac{1}{4}\cdot 1\cdot 1}_{\text{prob. cammino } 2\to1\to1\to1} \;=\; \frac{29}{64}.
\end{aligned}
$$