ALMA MATER STUDIORUM
UNIVERSITÀ DI BOLOGNA

Università di Bologna - Scuola di Scienze

Esame scritto di Calcolo delle Probabilità e Statistica
2 luglio 2019

Esercizio 1

L'urna A contiene due palline rosse e quattro palline verdi. L'urna B invece contiene una pallina rossa e una verde. Estraiamo una pallina a caso dall'urna A e la mettiamo nell'urna B, poi estraiamo una pallina dall'urna B.

1) Qual è la probabilità che la pallina estratta dall'urna B sia rossa, sapendo che la pallina estratta dall'urna A è verde?

2) Qual è la probabilità che la pallina estratta dall'urna B sia rossa?

3) Sapendo che la pallina estratta dall'urna B è rossa, qual è la probabilità che la pallina estratta dall'urna A sia anch'essa rossa?

4) Qual è la probabilità che le due palline estratte siano dello stesso colore?

Soluzione

Introduciamo gli eventi:

$$\begin{aligned} R_A &= \text{“la pallina estratta dall'urna } A \text{ è rossa”}, \\ V_A &= \text{“la pallina estratta dall'urna } A \text{ è verde”} \;=\; R_A^c, \\ R_B &= \text{“la pallina estratta dall'urna } B \text{ è rossa”}, \\ V_B &= \text{“la pallina estratta dall'urna } B \text{ è verde”} \;=\; R_B^c. \end{aligned}$$

1) $\mathbb{P}(R_B|V_A) = \frac{1}{3}$.

2) Per la formula delle probabilità totali, abbiamo che

$$\mathbb{P}(R_B) \;=\; \mathbb{P}(R_B|R_A)\,\mathbb{P}(R_A) + \mathbb{P}(R_B|V_A)\,\mathbb{P}(V_A) \;=\; \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3} + \frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3} \;=\; \frac{4}{9}.$$

3) Per la formula di Bayes

$$\mathbb{P}(R_A|R_B) \;=\; \frac{\mathbb{P}(R_B|R_A)\,\mathbb{P}(R_A)}{\mathbb{P}(R_B)} \;=\; \frac{\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3}}{\frac{4}{9}} \;=\; \frac{1}{2}.$$

4) L'evento di cui è richiesta la probabilità è

$$E \;=\; \text{“le due palline estratte sono dello stesso colore”} \;=\; (R_A \cap R_B) \cup (V_A \cap V_B).$$

Dato che gli eventi $R_A \cap R_B$ e $V_A \cap V_B$ sono disgiunti, per la proprietà di additività della probabilità abbiamo che

$$\mathbb{P}(E) \;=\; \mathbb{P}(R_A \cap R_B) + \mathbb{P}(V_A \cap V_B).$$

Per la regola della catena

$$\mathbb{P}(E) \;=\; \mathbb{P}(R_B|R_A)\,\mathbb{P}(R_A) + \mathbb{P}(V_B|V_A)\,\mathbb{P}(V_A) \;=\; \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3} + \frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3} \;=\; \frac{2}{3}.$$

Esercizio 2

Sia (X, Y) un vettore aleatorio discreto con densità discreta data dalla seguente tabella:

$X \setminus Y$	1	3	6
1	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$
2	$\frac{1}{12}$	p	$\frac{1}{12}$

dove p è un parametro reale.

1) Determinare il valore di p e le densità marginali di X e Y.

2) Calcolare $\mathbb{E}[X]$, $\mathbb{E}[Y]$, $\mathbb{E}[XY]$ e $\mathrm{Cov}(X, Y)$.

Siano $U = (X - 1)Y$ e $V = X(Y - 1)$.

3) Calcolare $\mathbb{P}(U \geq V)$.

4) Determinare densità discreta congiunta e densità marginali di U e V.

Soluzione

1) Chiaramente p deve essere tale che $0 \le p \le 1$. Inoltre, poiché $\sum_{i,j} p_{(X,Y)}(x_i, y_j) = 1$, si ottiene la seguente equazione nell'incognita p:

$$\frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{3} + \frac{1}{12} + p + \frac{1}{12} \;=\; 1.$$

Quindi $p = \frac{1}{6}$. La tabella completa con densità discreta congiunta e densità marginali di X e Y è dunque data da

$X \backslash Y$	1	3	6	p_X
1	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$
2	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{3}$
p_Y	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{5}{12}$	1

2)

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[X] &= \sum_i x_i\, p_X(x_i) = \frac{4}{3},\\
\mathbb{E}[Y] &= \sum_j y_j\, p_Y(y_j) = \frac{15}{4},\\
\mathbb{E}[XY] &= \sum_{i,j} x_i\, y_j\, p_{(X,Y)}(x_i, y_j) = \frac{29}{6},\\
\mathrm{Cov}(X,Y) &= \mathbb{E}[XY] - \mathbb{E}[X]\,\mathbb{E}[Y] = -\frac{1}{6}.
\end{aligned}$$

3)

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(U \ge V) = \mathbb{P}\big((X-1)Y \ge X(Y-1)\big) &= \mathbb{P}(X \ge Y)\\
&= p_{(X,Y)}(1,1) + p_{(X,Y)}(2,1) = \frac{1}{4}.
\end{aligned}$$

4)

$U \backslash V$	0	2	4	5	10	p_U
0	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	0	$\frac{1}{3}$	0	$\frac{2}{3}$
1	$\frac{1}{12}$	0	0	0	0	$\frac{1}{12}$
3	0	0	$\frac{1}{6}$	0	0	$\frac{1}{6}$
6	0	0	0	0	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$
p_V	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{12}$	1

Esercizio 3

Sia X una variabile aleatoria continua con funzione di ripartizione

$$F_X(x) \;=\; \begin{cases} 0, & x \leq 0, \\ \log(1+x), & 0 \leq x \leq A, \\ 1, & x \geq A, \end{cases}$$

dove A è un parametro reale strettamente positivo.

1) Dire per quale valore del parametro A la funzione F_X è effettivamente la funzione di ripartizione di una variabile aleatoria continua.

D'ora in poi si ponga A uguale al valore trovato.

2) Determinare la densità di X.

3) Calcolare $\mathbb{P}(X > 1)$, $\mathbb{E}[X]$ e $\mathrm{Var}(X)$.

4) Posto $Y = \log(1 + X)$, determinare la funzione di ripartizione di Y.

Soluzione

1) La risposta è $A = \mathrm{e} - 1 \simeq 1.72$. Infatti, se F_X è la funzione di ripartizione di una variabile aleatoria continua allora è continua ovunque, quindi anche nel punto $x = A$. Questo è vero se e solo se
$$\log(1 + A) \;=\; 1,$$
da cui si ottiene $A = \mathrm{e} - 1$. Per tale valore di A si verifica che la funzione F_X, oltre ad essere continua ovunque (quindi, in particolare, continua da destra ovunque), soddisfa anche le altre proprietà di una funzione di ripartizione:

- F_X è monotona crescente (non necessariamente strettamente).
- $\lim_{x\to-\infty} F_X(x) = 0$.
- $\lim_{x\to+\infty} F_X(x) = 1$.

2)
$$f_X(x) \;=\; \begin{cases} \frac{1}{1+x}, & 0 \le x \le \mathrm{e} - 1, \\ 0, & \text{altrove.} \end{cases}$$

3)
$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X > 1) \;&=\; 1 - \mathbb{P}(X \le 1) \;=\; 1 - F_X(1) \;=\; 1 - \log(2) \;\simeq\; 30.7\,\%, \\
\mathbb{E}[X] \;&=\; \int_{-\infty}^{+\infty} x\, f_X(x)\,\mathrm{d}x \;=\; \int_0^{\mathrm{e}-1} \frac{x}{1+x}\,\mathrm{d}x \;=\; \int_0^{\mathrm{e}-1} \frac{1+x}{1+x}\,\mathrm{d}x - \int_0^{\mathrm{e}-1} \frac{1}{1+x}\,\mathrm{d}x \\
&=\; \mathrm{e} - 1 - \log(\mathrm{e}) \;=\; \mathrm{e} - 2 \;\simeq\; 0.72, \\
\mathbb{E}[X^2] \;&=\; \int_{-\infty}^{+\infty} x^2\, f_X(x)\,\mathrm{d}x \;=\; \int_0^{\mathrm{e}-1} \frac{x^2}{1+x}\,\mathrm{d}x \\
&=\; \int_0^{\mathrm{e}-1} \frac{x^2+2x+1}{1+x}\,\mathrm{d}x - \int_0^{\mathrm{e}-1} \frac{2x+1}{1+x}\,\mathrm{d}x \\
&=\; \int_0^{\mathrm{e}-1} \frac{(1+x)^2}{1+x}\,\mathrm{d}x - \int_0^{\mathrm{e}-1} \frac{2x+2}{1+x}\,\mathrm{d}x + \int_0^{\mathrm{e}-1} \frac{1}{1+x}\,\mathrm{d}x \\
&=\; \int_0^{\mathrm{e}-1} (1+x)\,\mathrm{d}x - 2\int_0^{\mathrm{e}-1} 1\,\mathrm{d}x + \int_0^{\mathrm{e}-1} \frac{1}{1+x}\,\mathrm{d}x \\
&=\; \left[x + \frac{1}{2}x^2 - 2x + \log(1+x)\right]_0^{\mathrm{e}-1} \;=\; \frac{1}{2}(\mathrm{e}-1)^2 - \mathrm{e} + 1 + \log(\mathrm{e}) \\
&\qquad\qquad =\; \frac{\mathrm{e}^2 - 4\mathrm{e} + 5}{2} \;\simeq\; 0.76, \\
\mathrm{Var}(X) \;&=\; \mathbb{E}[X^2] - (\mathbb{E}[X])^2 \;=\; \frac{\mathrm{e}^2 - 4\mathrm{e} + 5}{2} - (\mathrm{e}-2)^2 \;=\; \frac{-\mathrm{e}^2 + 4\mathrm{e} - 3}{2} \;\simeq\; 0.24.
\end{aligned}$$

4) La funzione di ripartizione di Y è data da
$$F_Y(x) \;=\; \mathbb{P}(Y \le x) \;=\; \mathbb{P}(\log(1+X) \le x) \;=\; \mathbb{P}(1 + X \le \mathrm{e}^x) \;=\; \mathbb{P}(X \le \mathrm{e}^X - 1)$$

$$= F_X(\mathrm{e}^X - 1).$$

Quindi

$$F_Y(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0, \\ x, & 0 \leq x \leq 1, \\ 1, & x \geq 1. \end{cases}$$

In conclusione, Y ha distribuzione uniforme (continua) sull'intervallo $(0, 1)$:

$$Y \sim \mathrm{Unif}(0, 1).$$

Esercizio 4

Tre giocatori, seduti attorno ad un tavolo rotondo, giocano tirando tre monete (non truccate), secondo le seguenti regole:

- se escono tre teste, il giocatore che ha lanciato le monete vince la partita e il gioco termina;
- se escono tre croci, il giocatore che ha tirato può lanciare di nuovo le tre monete;
- se escono due teste e una croce, il gioco passa al giocatore alla sua sinistra;
- se escono due croci e una testa, il gioco passa al giocatore alla sua destra.

Il gioco può essere modellizzato tramite una catena di Markov a tempo discreto $(X_n)_{n\geq 0}$ con spazio degli stati $\mathcal{S} = \{0, 1, 2, 3\}$, in cui 0 è lo stato che indica la fine del gioco, mentre i numeri 1, 2, 3 corrispondono ai tre giocatori. Inoltre

$$X_n \;=\; \text{“stato del gioco”}.$$

Per “stato del gioco” si intende:

- il n$^{\text{o}}$ che denota il giocatore che deve lanciare le tre monete all'istante n, oppure
- lo stato che indica la fine del gioco, ovvero 0.

1) Scrivere la matrice di transizione Π della catena e disegnare il grafo orientato.

2) Quali sono le classi comunicanti?

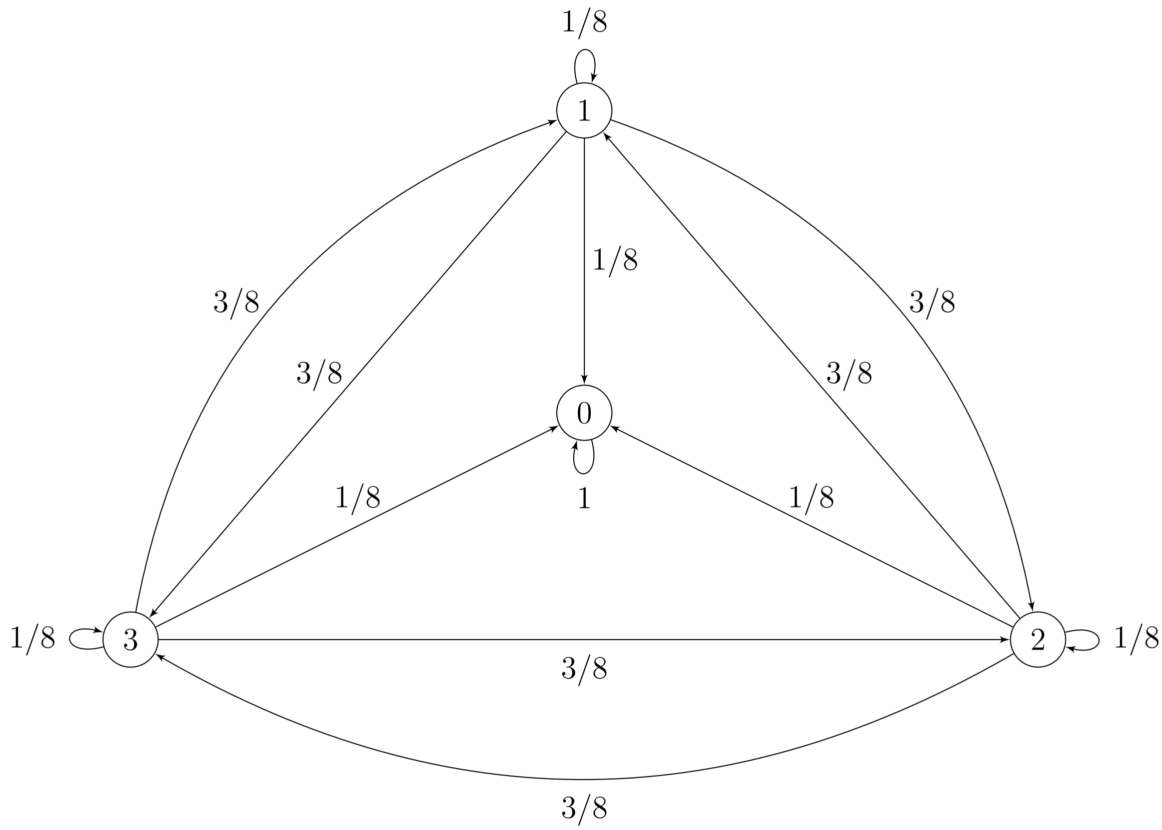
3) Sapendo che la catena di Markov si trova nello stato 1, qual è la probabilità che dopo due passi si trovi nello stato 3?

4) Sapendo che la catena di Markov si trova nello stato 2, qual è la probabilità che dopo quattro passi si trovi nello stato 1?

Soluzione

1)

$$\Pi = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{8} & \frac{1}{8} & \frac{3}{8} & \frac{3}{8} \\ \frac{1}{8} & \frac{3}{8} & \frac{1}{8} & \frac{3}{8} \\ \frac{1}{8} & \frac{3}{8} & \frac{3}{8} & \frac{1}{8} \end{pmatrix}$$



2) $\{0\}$ e $\{1,2,3\}$.

3) Dobbiamo calcolare $\pi_{13}^{(2)}$. A partire dal grafo orientato, notiamo che

$$\pi_{13}^{(2)} = \underbrace{\frac{1}{8}\cdot\frac{3}{8}}_{\text{prob. cammino } 1\to1\to3} + \underbrace{\frac{3}{8}\cdot\frac{3}{8}}_{\text{prob. cammino } 1\to2\to3} + \underbrace{\frac{3}{8}\cdot\frac{1}{8}}_{\text{prob. cammino } 1\to3\to3} = \frac{15}{64} = 23.4\,\%.$$

4) Dobbiamo calcolare $\pi_{21}^{(4)}$. Invece di calcolare tale probabilità condizionale a partire dal grafo orientato come al punto precedente, procediamo come segue. Ricordiamo innanzitutto che $\pi_{21}^{(4)}$ è l'elemento di riga 2 e colonna 1 della matrice Π^4. Dato che

$\Pi^4 = \Pi^2\Pi^2$ e Π^2 è la matrice delle probabilità di transizione in due passi $\pi_{ij}^{(2)}$, abbiamo che

$$\pi_{21}^{(4)} \;=\; \sum_{k=0}^{3} \pi_{2k}^{(2)}\pi_{k1}^{(2)}.$$

In altre parole, $\pi_{21}^{(4)}$ è la somma delle probabilità dei cammini che dopo due passi transitano nello stato k e dopo altri due passi terminano nello stato 1. Chiaramente possiamo escludere il valore $k = 0$. Dunque

$$\pi_{21}^{(4)} \;=\; \sum_{k=1}^{3} \pi_{2k}^{(2)}\pi_{k1}^{(2)} \;=\; \pi_{21}^{(2)}\pi_{11}^{(2)} + \pi_{22}^{(2)}\pi_{21}^{(2)} + \pi_{23}^{(2)}\pi_{31}^{(2)}.$$

Dato che il grafo è perfettamente simmetrico rispetto ai nodi 1, 2 e 3, abbiamo che

$$\pi_{11}^{(2)} \;=\; \pi_{22}^{(2)}$$

e

$$\pi_{21}^{(2)} \;=\; \pi_{23}^{(2)} \;=\; \pi_{31}^{(2)}.$$

Queste ultime probabilità di transizione coincidono con $\pi_{13}^{(2)}$, già calcolata al punto 3) e pari a $\frac{15}{64}$. Quindi

$$\pi_{21}^{(4)} \;=\; \pi_{21}^{(2)}\pi_{11}^{(2)} + \pi_{22}^{(2)}\pi_{21}^{(2)} + \pi_{23}^{(2)}\pi_{31}^{(2)} \;=\; 2\,\pi_{11}^{(2)}\frac{15}{64} + \frac{15^2}{64^2}.$$

Rimane dunque da calcolare $\pi_{11}^{(2)}$. Procedendo come al punto 3), si ha che

$$\pi_{11}^{(2)} \;=\; \underbrace{\frac{1}{8}\cdot\frac{1}{8}}_{\text{prob. cammino }1\to1\to1} + \underbrace{\frac{3}{8}\cdot\frac{3}{8}}_{\text{prob. cammino }1\to2\to1} + \underbrace{\frac{3}{8}\cdot\frac{3}{8}}_{\text{prob. cammino }1\to3\to1} \;=\; \frac{19}{64}.$$

In conclusione

$$\pi_{21}^{(4)} \;=\; 2\,\frac{19\cdot 15}{64^2} + \frac{15^2}{64^2} \;=\; \frac{795}{4096} \simeq\; 19.4\,\%.$$