ALMA MATER STUDIORUM
UNIVERSITÀ DI BOLOGNA

Università di Bologna - Scuola di Scienze

Esame scritto di Calcolo delle Probabilità e Statistica
5 giugno 2019

Esercizio 1

Un'urna viene riempita con 3 palline bianche, 5 rosse e 7 nere. Vengono estratte simultaneamente 2 palline, che, solo nel caso in cui hanno colore diverso, vengono reinserite nell'urna. Dopodiché si riestraggono simultaneamente 2 palline. Si calcolino le probabilità dei seguenti eventi:

1) alla prima estrazione si estraggono 2 palline bianche,

2) alla prima estrazione si estraggono 2 palline dello stesso colore,

3) nelle due estrazioni si estraggono 4 palline tutte rosse,

4) nelle due estrazioni si estraggono 4 palline tutte dello stesso colore.

Soluzione

Introduciamo gli eventi:

$$\begin{aligned}
B_k &= \text{“2 palline bianche all'estrazione } k\text{”} \\
R_k &= \text{“2 palline rosse all'estrazione } k\text{”} \\
N_k &= \text{“2 palline nere all'estrazione } k\text{”} \\
E_k &= B_k \cup R_k \cup N_k \;=\; \text{“2 palline dello stesso colore all'estrazione } k\text{”},
\end{aligned}$$

con $k = 1, 2$.

1)

$$\mathbb{P}(B_1) \;=\; \frac{\binom{3}{2}}{\binom{15}{2}} \;=\; \frac{1}{35} \;\simeq\; 0.0286.$$

2)

$$\mathbb{P}(E_1) \;=\; \mathbb{P}(B_1) + \mathbb{P}(R_1) + \mathbb{P}(N_1) \;=\; \frac{\binom{3}{2}}{\binom{15}{2}} + \frac{\binom{5}{2}}{\binom{15}{2}} + \frac{\binom{7}{2}}{\binom{15}{2}} \;=\; \frac{3+10+21}{105} \;\simeq\; 0.3238.$$

3)

$$\mathbb{P}(R_1 \cap R_2) \;=\; \mathbb{P}(R_2|R_1)\,\mathbb{P}(R_1) \;=\; \frac{\binom{3}{2}}{\binom{13}{2}}\,\frac{\binom{5}{2}}{\binom{15}{2}} \;=\; \frac{1}{273} \;\simeq\; 0.0037.$$

4)

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(B_1 \cap B_2) + \mathbb{P}(R_1 \cap R_2) + \mathbb{P}(N_1 \cap N_2) \;&=\; 0 + \mathbb{P}(R_2|R_1)\,\mathbb{P}(R_1) + \mathbb{P}(N_2|N_1)\,\mathbb{P}(N_1) \\
&=\; \frac{\binom{3}{2}}{\binom{13}{2}}\,\frac{\binom{5}{2}}{\binom{15}{2}} + \frac{\binom{5}{2}}{\binom{13}{2}}\,\frac{\binom{7}{2}}{\binom{15}{2}} \;=\; \frac{3 \cdot 10 + 10 \cdot 21}{78 \cdot 105} \\
&=\; \frac{8}{273} \;\simeq\; 0.0293.
\end{aligned}$$

Esercizio 2

Si lancia un dado regolare a quattro facce. Sia X la variabile aleatoria che indica il risultato del lancio del dado. Dopo aver lanciato il dado, si estrae una pallina da un'urna contenente X palline numerate da 1 a X. Sia

$$Y \;=\; \text{“n}^{\text{o}}\text{ della pallina estratta”}.$$

1) Quanto vale $\mathbb{P}(X = 4, Y = 4)$?

2) Determinare densità discreta congiunta e densità marginali di X e Y.

3) X e Y sono indipendenti?

4) Calcolare $\mathbb{E}[X - Y]$.

Soluzione

1)

$$\mathbb{P}(X=4,Y=4) = \mathbb{P}(Y=4|X=4)\,\mathbb{P}(X=4) = \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4} = \frac{1}{16}.$$

2) Notiamo che

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X=i,Y=j) &= \mathbb{P}(Y=j|X=i)\,\mathbb{P}(X=i)\\ &= \mathbb{P}(Y=j|X=i)\cdot\frac{1}{4} = \begin{cases}\frac{1}{4j}, & \text{se } i\geq j,\\ 0, & \text{se } i<j.\end{cases}\end{aligned}$$

Quindi densità discreta congiunta e densità marginali di X e Y sono date da

$X \backslash Y$	1	2	3	4	p_X
1	$\frac{1}{4}$	0	0	0	$\frac{1}{4}$
2	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	0	0	$\frac{1}{4}$
3	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	0	$\frac{1}{4}$
4	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{4}$
p_Y	$\frac{25}{48}$	$\frac{13}{48}$	$\frac{7}{48}$	$\frac{1}{16}$	1

3) No, infatti ad esempio $p_{(X,Y)}(1,1) \neq p_X(1)\,p_Y(1)$.

4) Dato che $\mathbb{E}[X] = \frac{5}{2}$ e $\mathbb{E}[Y] = \frac{7}{4}$, si ha che $\mathbb{E}[X-Y] = \mathbb{E}[X] - \mathbb{E}[Y] = \frac{3}{4}$.

Esercizio 3

Sia X una variabile aleatoria continua con densità

$$f_X(x) \;=\; \begin{cases} -\alpha\, x^2 + 1, & -\frac{1}{\sqrt{\alpha}} \leq x \leq \frac{1}{\sqrt{\alpha}}, \\ 0, & \text{altrimenti,} \end{cases}$$

dove $\alpha > 0$ è un parametro fissato.

1) Determinare il valore del parametro α in modo tale che f_X sia effettivamente una densità.

D'ora in poi si ponga α uguale al valore trovato.

2) Calcolare $\mathbb{E}[X]$ e $\mathrm{Var}(X)$.

3) Determinare la funzione di ripartizione di X.

4) Posto $Y = \log\left(X + \frac{1}{\sqrt{\alpha}}\right)$, trovare la funzione di ripartizione di Y.

Soluzione

1) f_X è una densità (continua) se e solo se

- $f_X(x) \geq 0$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$;
- $\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)\,\mathrm{d}x = 1$.

La prima proprietà è sempre vera, qualunque sia $\alpha > 0$. La seconda proprietà è invece verificata solo per $\alpha = \frac{16}{9}$, infatti

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)\,\mathrm{d}x \;=\; \int_{-\frac{1}{\sqrt{\alpha}}}^{\frac{1}{\sqrt{\alpha}}} (-\alpha x^2 + 1)\,\mathrm{d}x \;=\; 2\int_0^{\frac{1}{\sqrt{\alpha}}} (-\alpha x^2 + 1)\,\mathrm{d}x \;=\; \frac{4}{3\sqrt{\alpha}}.$$

2)

$$\mathbb{E}[X] \;=\; \int_{-\infty}^{+\infty} x\, f_X(x)\,\mathrm{d}x \;=\; \int_{-\frac{3}{4}}^{\frac{3}{4}} x\left(-\frac{16}{9}x^2 + 1\right)\mathrm{d}x \;=\; 0,$$

$$\begin{aligned}\mathrm{Var}(X) \;&=\; \mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}[X]^2 \;=\; \mathbb{E}[X^2] \;=\; \int_{-\infty}^{+\infty} x^2\, f_X(x)\,\mathrm{d}x \;=\; \int_{-\frac{3}{4}}^{\frac{3}{4}} x^2\left(-\frac{16}{9}x^2 + 1\right)\mathrm{d}x \\ &=\; 2\int_0^{\frac{3}{4}} x^2\left(-\frac{16}{9}x^2 + 1\right)\mathrm{d}x \;=\; \frac{9}{80} \;=\; 0.1125.\end{aligned}$$

3)

$$F_X(x) \;=\; \int_{-\infty}^{x} f_X(y)\,\mathrm{d}y \;=\; \begin{cases} 0, & x \leq -\frac{3}{4}, \\ \frac{1}{2} + x - \frac{16}{27}x^3, & -\frac{3}{4} \leq x \leq \frac{3}{4}, \\ 1, & x \geq \frac{3}{4}. \end{cases}$$

4) La funzione di ripartizione di Y è data da

$$\begin{aligned}F_Y(x) \;&=\; \mathbb{P}\Big(\log\Big(X + \frac{3}{4}\Big) \leq x\Big) \;=\; \mathbb{P}\Big(X + \frac{3}{4} \leq \mathrm{e}^x\Big) \;=\; \mathbb{P}\Big(X \leq \mathrm{e}^x - \frac{3}{4}\Big) \\ &=\; F_X\Big(\mathrm{e}^x - \frac{3}{4}\Big).\end{aligned}$$

Quindi, dato che $\mathrm{e}^x - \frac{3}{4} > -\frac{3}{4}$ per ogni $x \in \mathbb{R}$, inoltre $\mathrm{e}^x - \frac{3}{4} \leq \frac{3}{4}$ se e solo se $x \leq \log\left(\frac{3}{2}\right)$, otteniamo

$$F_Y(x) \;=\; \begin{cases} \mathrm{e}^x - \frac{1}{4} - \frac{16}{27}\left(\mathrm{e}^x - \frac{3}{4}\right)^3, & x \leq \log\left(\frac{3}{2}\right), \\ 1, & x \geq \log\left(\frac{3}{2}\right). \end{cases}$$

Esercizio 4

Sei palline, due bianche e quattro rosse, sono distribuite a caso in due urne A e B (tre sfere ciascuna). Si estraggono due palline, una da ogni urna. Dopodiché, ogni pallina pescata viene messa nell'altra urna, anziché in quella da cui è stata estratta. Le estrazioni proseguono seguendo sempre la stessa procedura. Fissiamo la nostra attenzione sull'urna A e consideriamo nel tempo il numero di palline rosse contenute in A. Sia, in particolare,

$$X_n \;=\; \text{“n}^{\text{o}}\text{ di palline rosse contenute nell'urna } A \text{ dopo } n \text{ estrazioni”}, \qquad \forall\, n \geq 0.$$

Si noti che X_0 è il n$^{\text{o}}$ di palline rosse contenute nell'urna A nella configurazione iniziale, cioè prima che comincino le estrazioni.

1) La successione $(X_n)_{n\geq 0}$ è una catena di Markov a tempo discreto, omogenea e a stati finiti. Determinare spazio degli stati, matrice di transizione e disegnare il corrispondente grafo orientato.

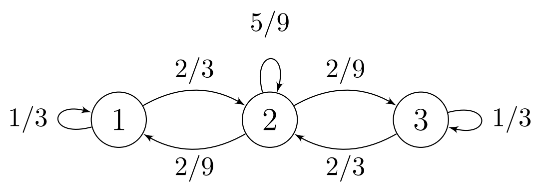
2) Quali sono le classi comunicanti?

3) Sapendo che nell'urna A ci sono due palline rosse, qual è la probabilità che dopo tre estrazioni ce ne siano tre?

4) Qual è la densità discreta di X_0?

1) $\mathcal{S} = \{1, 2, 3\}$,

$$\Pi = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0 \\ \frac{2}{9} & \frac{5}{9} & \frac{2}{9} \\ 0 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$



2) La catena di Markov è irriducibile, ovvero esiste un'unica classe comunicante che è dunque $\{1, 2, 3\}$.

3) Dobbiamo calcolare $\pi_{23}^{(3)}$. A partire dal grafo orientato, abbiamo che

$$\pi_{23}^{(3)} = \underbrace{\frac{5}{9} \cdot \frac{5}{9} \cdot \frac{2}{9}}_{\text{prob. cammino } 2\to2\to2\to3} + \underbrace{\frac{5}{9} \cdot \frac{2}{9} \cdot \frac{1}{3}}_{\text{prob. cammino } 2\to2\to3\to3} + \underbrace{\frac{2}{9} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3}}_{\text{prob. cammino } 2\to3\to3\to3}$$
$$+ \underbrace{\frac{2}{9} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{9}}_{\text{prob. cammino } 2\to3\to2\to3} + \underbrace{\frac{2}{9} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{9}}_{\text{prob. cammino } 2\to1\to2\to3} = \frac{146}{729} \simeq 0.2003.$$

4) "Distribuite a caso" significa che tutte le possibili terne (o meglio, *combinazioni semplici*) sono *equiprobabili*, ovvero che le tre palline che si trovano nell'urna A sono state scelte tramite "estrazione simultanea" dalle sei palline. Per tale ragione, la densità discreta di X_0 è data dalla seguente tabella:

X_0	1	2	3
p_{X_0}	$\frac{\binom{4}{1}\binom{2}{2}}{\binom{6}{3}} = \frac{1}{5}$	$\frac{\binom{4}{2}\binom{2}{1}}{\binom{6}{3}} = \frac{3}{5}$	$\frac{\binom{4}{3}\binom{2}{0}}{\binom{6}{3}} = \frac{1}{5}$