ALMA MATER STUDIORUM
UNIVERSITÀ DI BOLOGNA

Università di Bologna - Scuola di Scienze

Esame scritto di Calcolo delle Probabilità e Statistica
11 febbraio 2019

Esercizio 1

L'urna A contiene una pallina rossa e due palline blu, mentre l'urna B contiene due palline rosse. Si lancia una moneta: se esce testa si estrae una pallina dalla scatola A, se esce croce si estrae una pallina dalla scatola B.

1) Quanto vale la probabilità di estrarre una pallina rossa sapendo che è uscito testa?

2) Si calcoli la probabilità dell'evento "la pallina estratta è rossa".

3) Quanto vale la probabilità dell'evento "l'esito del lancio della moneta è testa e la pallina estratta è rossa"?

4) Sapendo di aver estratto una pallina rossa, si calcoli la probabilità che l'esito del lancio della moneta sia stato testa.

Soluzione

Introduciamo gli eventi:

$$\begin{aligned} A &= \text{“esce testa”} \\ E &= \text{“la pallina estratta è rossa”} \end{aligned}$$

1) $\mathbb{P}(E|A) = \frac{1}{3}$.

2) Per la formula delle probabilità totali, abbiamo che

$$\mathbb{P}(E) \;=\; \mathbb{P}(E|A)P(A) + \mathbb{P}(E|A^c)\mathbb{P}(A^c) \;=\; \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2} + 1\cdot\frac{1}{2} \;=\; \frac{2}{3}.$$

3)

$$\mathbb{P}(A \cap E) \;=\; \mathbb{P}(E|A)\mathbb{P}(A) \;=\; \frac{1}{6}.$$

4) Dalla definizione di probabilità condizionata (in alternativa si può utilizzare la formula di Bayes) si ha che

$$\mathbb{P}(A|E) \;=\; \frac{\mathbb{P}(A \cap E)}{\mathbb{P}(E)} \;=\; \frac{\frac{1}{6}}{\frac{2}{3}} \;=\; \frac{1}{4}.$$

Esercizio 2

Siano X ed Y due variabili aleatorie discrete con densità discreta congiunta e densità marginali date da

$X \backslash Y$	0	3	4	5	p_X
0	0.1	0.2	0.1	0.2	0.6
2	0	0	0.1	0.2	0.3
6	0	0	0.1	0	0.1
p_Y	0.1	0.2	0.3	0.4	1

1) X e Y sono indipendenti?

2) Quanto vale $\mathbb{P}(2X - Y = 0)$?

3) Sia $Z = 2X - Y$. Determinare la densità discreta di Z.

4) Calcolare $\mathbb{E}[X^2Y^3]$.

Soluzione

1) No, infatti ad esempio $p_{(X,Y)}(0,0) \neq p_X(0)\, p_Y(0)$.

2) Notiamo che $\{2X - Y = 0\} = \{(0,0),(2,4)\}$, quindi

$$\mathbb{P}(2X - Y = 0) \;=\; p_{(X,Y)}(0,0) + p_{(X,Y)}(2,4) \;=\; 0.2.$$

3)

Z	-5	-4	-3	-1	0	8
p_Z	0.2	0.1	0.2	0.2	0.2	0.1

4)

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[X^2 Y^3] \;&=\; \sum_{\substack{i=0,2,6\\ j=0,3,4,5}} i^2\, j^3\, p_{(X,Y)}(i,j)\\ &=\; 2^2 \cdot 4^3 \cdot p_{(X,Y)}(2,4) + 2^2 \cdot 5^3 \cdot p_{(X,Y)}(2,5) + 6^2 \cdot 4^3 \cdot p_{(X,Y)}(6,4) \;=\; 356.\end{aligned}$$

Esercizio 3

Sia X una variabile aleatoria continua con densità

$$f_X(x) \;=\; \begin{cases} \frac{2}{\lambda}\big(1-\frac{x}{\lambda}\big), & 0<x<\lambda, \\ 0, & \text{altrimenti}, \end{cases}$$

dove $\lambda > 0$ è un parametro fissato.

1) Quanto vale $\mathbb{P}(X \geq \lambda/3)$?

2) Determinare la funzione di ripartizione di X.

3) Calcolare $\mathbb{E}[X^p]$ per qualunque $p > 1$.

4) Qual è la funzione di ripartizione della variabile aleatoria $Y = \lambda - X$?

Soluzione

1) $\mathbb{P}(X \geq \lambda/3) = \int_{\lambda/3}^{\lambda} f_X(x)\,\mathrm{d}x = \frac{4}{9}$.

2)

$$F_X(t) \;=\; \int_{-\infty}^{t} f_X(x)\,\mathrm{d}x \;=\; \begin{cases} 0, & t \leq 0, \\ \frac{t}{\lambda}\left(2 - \frac{t}{\lambda}\right), & 0 \leq t \leq \lambda, \\ 1 & t \geq \lambda. \end{cases}$$

3)

$$\mathbb{E}[X^p] \;=\; \int_{-\infty}^{+\infty} x^p\, f_X(x)\,\mathrm{d}x \;=\; \int_0^{\lambda} x^p\, \frac{2}{\lambda}\left(1 - \frac{x}{\lambda}\right)\mathrm{d}x \;=\; \frac{2\lambda^p}{(p+1)(p+2)}.$$

4) La funzione di ripartizione di Y è data da

$$F_Y(t) \;=\; \mathbb{P}(\lambda - X \leq t) \;=\; \mathbb{P}(X \geq \lambda - t) \;=\; 1 - F_X(\lambda - t), \qquad \forall\, t \in \mathbb{R}.$$

Quindi

$$F_Y(t) \;=\; \begin{cases} 0, & t \leq 0, \\ 1 - \frac{\lambda - t}{\lambda}\left(2 - \frac{\lambda - t}{\lambda}\right), & 0 \leq t \leq \lambda, \\ 1 & t \geq \lambda, \end{cases} \;=\; \begin{cases} 0, & t \leq 0, \\ \frac{t^2}{\lambda^2}, & 0 \leq t \leq \lambda, \\ 1 & t \geq \lambda. \end{cases}$$

Esercizio 4

Un'urna contiene inizialmente due palline rosse e due palline nere. Due giocatori, Anna e Marco, effettuano delle estrazioni successive con le seguenti regole:

- se la pallina estratta è nera, essa viene messa da parte (non viene rimessa nell'urna);
- se la pallina estratta è rossa, essa viene rimessa nell'urna insieme a una nuova pallina nera;
- il gioco termina quando nell'urna ci sono quattro palline nere (Anna vince) oppure quando non ci sono più palline nere (Marco vince).

Il gioco può essere descritto da una catena di Markov a tempo discreto $(X_n)_{n\geq 0}$, dove X_n denota il numero di palline nere presenti nell'urna all'istante n.

1) Introdurre lo spazio di stato $\mathcal{S}$ della catena e scrivere la matrice di transizione Π.

2) Disegnare il grafo orientato associato alla catena di Markov.

3) Quali sono le classi comunicanti?

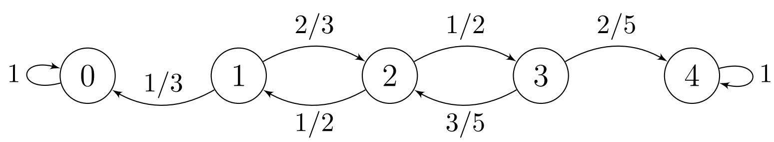
4) Scrivere la legge di X_0 (ovvero la distribuzione iniziale della catena di Markov) e calcolare $\mathbb{P}(X_3 = 4)$.

Soluzione

1) $\mathcal{S} = \{0, 1, 2, 3, 4\}$,

$$\Pi \;=\; \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{2}{3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{3}{5} & 0 & \frac{2}{5} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

2)



3) $\{0\}$, $\{1, 2, 3\}$ e $\{4\}$.

4) Dato che inizialmente ci sono due palline nere nell'urna, la densità discreta di X_0 è data da

X_0	0	1	2	3	4
p_{X_0}	0	0	1	0	0

La densità discreta di X_3 è invece data dalla formula $\vec{\boldsymbol{p}}_{\boldsymbol{X_3}} = \vec{\boldsymbol{p}}_{\boldsymbol{X_0}} \Pi^3$, quindi

$$\mathbb{P}(X_3 = 4) \;=\; \sum_{i=0}^{4} p_{X_0}(i)\, \pi_{i4}^{(3)} \;=\; \pi_{24}^{(3)} \;=\; \underbrace{\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{5} \cdot 1}_{\text{prob. cammino } 2 \to 3 \to 4 \to 4} \;=\; \frac{1}{5}.$$