ALMA MATER STUDIORUM
UNIVERSITÀ DI BOLOGNA

Università di Bologna - Scuola di Scienze

Esame scritto di Calcolo delle Probabilità e Statistica
14 gennaio 2019

Esercizio 1

Un'urna contiene dieci palline, di cui sei rosse e quattro blu. Si estraggono due palline *senza* reimmissione. Si considerino gli eventi:

$$\begin{aligned} A &= \text{“la prima pallina estratta è rossa”} \\ B &= \text{“la seconda pallina estratta è rossa”} \\ C &= \text{“le palline estratte hanno colori diversi”} \end{aligned}$$

1) Quanto vale la probabilità dell'evento A?

2) Quanto vale la probabilità condizionata $\mathbb{P}(B|A)$?

3) Si calcoli la probabilità dell'evento B.

4) Si calcoli la probabilità condizionata $\mathbb{P}(A|B)$.

5) Si calcoli la probabilità dell'evento C.

Soluzione

1) $\mathbb{P}(A) = \frac{6}{10} = 0.6.$

2) $\mathbb{P}(B|A) = \frac{5}{9} \simeq 0.5556.$

3) Per la formula delle probabilità totali, si ha che

$$\mathbb{P}(B) \;=\; \mathbb{P}(B|A)\mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B|A^c)\mathbb{P}(A^c) \;=\; \frac{5}{9}\cdot\frac{6}{10} + \frac{6}{9}\cdot\frac{4}{10} \;=\; \frac{6}{10} \;=\; 0.6.$$

4) Per la formula di Bayes, abbiamo che

$$\mathbb{P}(A|B) \;=\; \frac{\mathbb{P}(B|A)\mathbb{P}(A)}{\mathbb{P}(B)} \;=\; \frac{\frac{5}{9}\cdot\frac{6}{10}}{\frac{6}{10}} \;=\; \frac{5}{9} \;\simeq\; 0.5556.$$

5) Possiamo esprimere C in termini degli eventi A e B come segue:

$$C \;=\; \big(A \cap B^c\big) \cup \big(A^c \cap B\big).$$

Dato che gli insiemi $A \cap B^c$ e $A^c \cap B$ sono disgiunti, per la proprietà di additività della probabilità, otteniamo

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(C) \;=\; \mathbb{P}(A \cap B^c) + \mathbb{P}(A^c \cap B) \;&=\; \mathbb{P}(B^c|A)\mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B|A^c)\mathbb{P}(A^c)\\ &=\; \frac{4}{9}\cdot\frac{6}{10} + \frac{6}{9}\cdot\frac{4}{10} \;=\; \frac{8}{15} \;\simeq\; 0.5333.\end{aligned}$$

Esercizio 2

Sia X una variabile aleatoria discreta avente legge descritta dalle formule

$$\mathbb{P}(X=0) \;=\; \frac{2}{\lambda}, \qquad \mathbb{P}(X=\lambda^2) \;=\; 1-\frac{2}{\lambda},$$

dove λ è un parametro reale.

1) Trovare i valori ammissibili di λ.

2) Calcolare media e varianza di X.

3) Sia Y una variabile aleatoria con la stessa legge di X, ma indipendente da X. Determinare densità discreta congiunta e densità marginali di X e Y.

4) Calcolare $\mathbb{E}[XY]$ e $\mathrm{Var}(X+Y)$.

Soluzione

1) Le quantità $2/\lambda$ e $1-2/\lambda$ sono probabilità, quindi devono essere comprese tra 0 ed 1; inoltre la loro somma deve fare 1. Devono essere dunque verificate le condizioni seguenti:

$$0 \;\le\; \frac{2}{\lambda} \;\le\; 1, \qquad 0 \;\le\; 1-\frac{2}{\lambda} \;\le\; 1, \qquad \mathbb{P}(X=0)+\mathbb{P}(X=\lambda^2) \;=\; 1,$$

da cui si ottiene $\lambda \ge 2$.

2) $\mathbb{E}[X] = \lambda(\lambda-2)$ e $\mathrm{Var}(X) = 2\lambda^2(\lambda-2)$.

3)

$X \backslash Y$	0	λ^2	p_X
0	$\frac{4}{\lambda^2}$	$\frac{2}{\lambda}\left(1-\frac{2}{\lambda}\right)$	$\frac{2}{\lambda}$
λ^2	$\frac{2}{\lambda}\left(1-\frac{2}{\lambda}\right)$	$\left(1-\frac{2}{\lambda}\right)^2$	$1-\frac{2}{\lambda}$
p_Y	$\frac{2}{\lambda}$	$1-\frac{2}{\lambda}$	1

4) Per l'indipendenza, si ha che

$$\mathbb{E}[XY] \;=\; \mathbb{E}[X]\mathbb{E}[Y], \qquad\qquad \mathrm{Cov}(X,Y) \;=\; 0.$$

Quindi

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[XY] \;&=\; \lambda^2(\lambda-2)^2, \\ \mathrm{Var}(X+Y) \;&=\; \mathrm{Var}(X)+\mathrm{Var}(Y) \;=\; 4\lambda^2(\lambda-2). \end{aligned}$$

Esercizio 3

Supponiamo che X abbia legge esponenziale di parametro 2, ovvero X è una variabile aleatoria continua con densità

$$f_X(x) \; = \; \begin{cases} 0, & x < 0, \\ 2\,\mathrm{e}^{-2\,x}, & x \geq 0. \end{cases}$$

Sia

$$Z \; = \; \frac{1}{1 + \mathrm{e}^{-2X}}.$$

1) Qual è la funzione di ripartizione di X?

2) Calcolare $\mathbb{E}[Z]$.

3) Mostrare che $\mathbb{P}(Z \leq 1/2) = 0$ e $\mathbb{P}(Z \leq 1) = 1$.

4) Determinare la funzione di ripartizione di Z.

Soluzione

1)

$$F_X(t) \;=\; \begin{cases} 0, & t \leq 0, \\ 1 - \mathrm{e}^{-2\,t}, & t \geq 0. \end{cases}$$

2)

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[Z] \;=\; \mathbb{E}\bigg[\frac{1}{1+\mathrm{e}^{-2X}}\bigg] \;&=\; \int_0^{+\infty} \frac{2\,\mathrm{e}^{-2\,x}}{1+\mathrm{e}^{-2\,x}}\,\mathrm{d}x \\ &=\; \big[-\log\big(1+\mathrm{e}^{-2\,x}\big)\big]_0^{+\infty} \;=\; \log 2. \end{aligned}$$

3) Notiamo che la funzione $x \mapsto 1/(1+\mathrm{e}^{-2x})$, per $x \geq 0$, è sempre positiva e prende valori nell'intervallo $[1/2, 1)$. Deduciamo quindi che $\mathbb{P}(Z \leq 1/2) = 0$ e $\mathbb{P}(Z \leq 1) = 1$.

4) Dal punto precedente, sappiamo che $F_Z(1/2) = 0$ ed $F_Z(1) = 1$. Dalla monotonia della funzione di ripartizione, segue che

$$F_Z(t) \;=\; 0, \qquad \forall\, t \leq \frac{1}{2}, \qquad\qquad F_Z(t) \;=\; 1, \qquad \forall\, t \geq 1.$$

Sia ora $t \in (1/2, 1)$, allora

$$\begin{aligned} F_Z(t) \;=\; \mathbb{P}\bigg(\frac{1}{1+\mathrm{e}^{-2X}} \leq t\bigg) \;=\; \mathbb{P}\bigg(\mathrm{e}^{-2X} \geq \frac{1}{t} - 1\bigg) \;&=\; \mathbb{P}\bigg(-2X \geq \log\bigg(\frac{1}{t}-1\bigg)\bigg) \\ &=\; \mathbb{P}\bigg(X \leq -\frac{1}{2}\log\bigg(\frac{1}{t}-1\bigg)\bigg) \\ &=\; \mathbb{F}_X\bigg(-\frac{1}{2}\log\bigg(\frac{1}{t}-1\bigg)\bigg). \end{aligned}$$

Quindi

$$F_Z(t) \;=\; \begin{cases} 0, & t \leq 1/2, \\ 1 - \mathrm{e}^{\log(\frac{1}{t}-1)}, & 1/2 < t < 1, \\ 1, & t \geq 1, \end{cases} \;=\; \begin{cases} 0, & t \leq 1/2, \\ 2 - \frac{1}{t}, & 1/2 < t < 1, \\ 1, & t \geq 1. \end{cases}$$

Esercizio 4

Si consideri un gioco da tavolo in cui una pedina si muove su un tabellone con cinque caselle, numerate da 0 a 4. Per i movimenti si utilizzano quattro monete non truccate, recanti sulle due facce le scritte *zero* e *quattro*, secondo le seguenti regole.

- Si parte dalla casella 1.
- Si vince raggiungendo la casella 4.
- Si perde raggiungendo la casella 0.

Se la pedina è su una casella, il movimento successivo è deciso in base alle seguenti regole.

- Se la pedina si trova sulle caselle 0 oppure 4, il gioco termina (ovvero la pedina resta dove si trova indefinitamente).
- Se la pedina si trova su una casella $k = 1, 2, 3$, il movimento è deciso dal lancio di $(k + 1)$ monete:
  - se si ottengono tutti *zero*, la pedina si sposta sulla casella 0;
  - se si ottengono tutti *quattro*, la pedina avanza di una casella;
  - in tutti gli altri casi, la pedina resta sull'attuale casella.

Il gioco può essere descritto da una catena di Markov a tempo discreto $(X_n)_{n\geq 0}$, dove X_n denota la casella occupata dalla pedina all'istante n.

1) Introdurre lo spazio di stato $\mathcal{S}$ della catena e scrivere la matrice di transizione Π.

2) Disegnare il grafo orientato associato alla catena di Markov.

3) Quali sono le classi comunicanti?

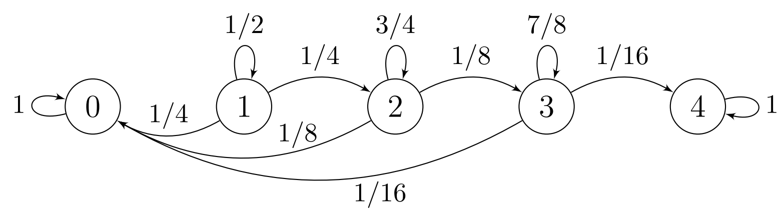
4) Scrivere la legge di X_0 (ovvero la distribuzione iniziale della catena di Markov) e trovare la legge di X_1.

Soluzione

1) $\mathcal{S} = \{0, 1, 2, 3, 4\}$,

$$\Pi = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ \frac{1}{8} & 0 & \frac{3}{4} & \frac{1}{8} & 0 \\ \frac{1}{16} & 0 & 0 & \frac{7}{8} & \frac{1}{16} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

2)



3) $\{0\}$, $\{1\}$, $\{2\}$, $\{3\}$ e $\{4\}$.

4) Dato che il gioco incomincia dalla casella 1, la densità discreta di X_0 è data da

X_0	0	1	2	3	4
p_{X_0}	0	1	0	0	0

La densità discreta di X_1 è invece data dalla formula $\vec{\boldsymbol{p}}_{\boldsymbol{X_1}} = \vec{\boldsymbol{p}}_{\boldsymbol{X_0}}\Pi$, quindi

X_1	0	1	2	3	4
p_{X_1}	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	0	0