ALMA MATER STUDIORUM
UNIVERSITÀ DI BOLOGNA

Università di Bologna - Scuola di Scienze

Esame scritto di Calcolo delle Probabilità e Statistica
28 giugno 2018

Esercizio 1

Un'urna contiene sedici palline, sette rosse e nove blu. Si estraggono tre palline *senza* reimmissione. Si considerino gli eventi:

$$\begin{aligned} A &= \text{“la prima pallina estratta è rossa, le altre due sono blu”} \\ B &= \text{“al più una pallina estratta è rossa”} \end{aligned}$$

1) Si calcoli la probabilità dell'evento A.

2) Si calcoli la probabilità dell'evento B.

3) Quanto vale la probabilità condizionata $P(A|B)$? A e B sono indipendenti?

Si considerino ora le variabili aleatorie discrete:

$$\begin{aligned} X &= \text{“n}^{\text{o}}\text{ di palline rosse estratte”} \\ Y &= \text{“n}^{\text{o}}\text{ di palline blu estratte”} \end{aligned}$$

4) Determinare supporto, densità discreta congiunta e densità marginali di X ed Y.
[Nel calcolo della densità discreta congiunta, si usi che $p_{(X,Y)}(3,0) = 0.0625$.]

Soluzione

1) Etichettiamo le sette palline rosse presenti nell'urna con $R1, R2, R3, R4, R5, R6, R7$ e le nove palline blu con $B1, \ldots, B9$. Possiamo dunque descrivere l'esperimento aleatorio tramite il seguente spazio campionario:

$$\Omega \;=\; \big\{(x_1, x_2, x_3)\colon x_i = R_1, \ldots, R_7, B_1, \ldots, B_9, \text{ con } x_1, x_2, x_3 \text{ distinti fra loro}\big\}.$$

Dato che le terne (x_1, x_2, x_3) sono equiprobabili, consideriamo su Ω la probabilità classica, che è data da *casi favorevoli/casi possibili*.

Il numero di *casi possibili* è pari alla cardinalità di Ω, ovvero $16 \cdot 15 \cdot 14 = 3360$. Calcoliamo ora il numero di *casi favorevoli*, ovvero la cardinalità di A. Per farlo, utilizziamo il metodo delle scelte successive. A è l'insieme di tutte le terne $(x_1, x_2, x_3) \in \Omega$ tali che:

- x_1 è una pallina rossa scelta fra $R1, R2, R3, R4, R5, R6, R7$: 7 scelte possibili;
- x_2 è una pallina blu scelta fra le nove blu disponibili: 9 scelte possibili;
- x_3 è una pallina blu scelta fra le otto blu rimaste nell'urna: 8 scelte possibili.

Quindi $\#A = 7 \cdot 9 \cdot 8 = 504$, perciò

$$\mathbb{P}(A) \;=\; \frac{504}{3360} \;=\; \frac{3}{20} \;=\; 0.15.$$

2) Siano

$$\begin{aligned} E_0 &= \text{“nessuna pallina estratta è rossa”} \\ E_1 &= \text{“una pallina estratta è rossa, le altre due sono blu”} \end{aligned}$$

Allora $B = E_0 \cup E_1$, inoltre gli eventi E_0 e E_1 sono disgiunti. Dunque, per la proprietà di additività della probabilità,

$$\mathbb{P}(B) \;=\; \mathbb{P}(E_0) + \mathbb{P}(E_1) \;=\; \frac{\#E_0}{\#\Omega} + \frac{\#E_1}{\#\Omega}.$$

Restano da calcolare $\#E_0$ e $\#E_1$. Abbiamo che $\#E_0 = 9 \cdot 8 \cdot 7 = 504$, mentre $\#E_1 = 3\,\#A$, dato che l'evento E_1 non specifica se la pallina rossa è estratta per prima (come invece accade per A) o per seconda o per terza. Dunque $\mathbb{P}(E_0) = \mathbb{P}(A) = 0.15$, mentre $\mathbb{P}(E_1) = 3\,\mathbb{P}(A) = 0.45$. In conclusione

$$\mathbb{P}(B) \;=\; 4\,\mathbb{P}(A) \;=\; \frac{12}{20} \;=\; 0.6.$$

3)

$$\mathbb{P}(A|B) \;=\; \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)}.$$

Sappiamo che $\mathbb{P}(B) = 4\,\mathbb{P}(A) = 0.6$, resta da calcolare $\mathbb{P}(A \cap B)$. Notiamo che $A \subset B$, quindi $A \cap B = A$, perciò

$$\mathbb{P}(A|B) \;=\; \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)} \;=\; \frac{\mathbb{P}(A)}{4\,\mathbb{P}(A)} \;=\; \frac{1}{4} \;=\; 0.25.$$

Infine, A e B *non* sono indipendenti, infatti $\mathbb{P}(A \cap B) \neq \mathbb{P}(A)\,\mathbb{P}(B)$.

4) $\mathcal{S}_X = \mathcal{S}_Y = \{0, 1, 2, 3\}$, mentre la densità discreta congiunta e le densità marginali sono date da (la densità discreta congiunta è zero se $X + Y \neq 3$):

$X \backslash Y$	0	1	2	3	p_X
0	0	0	0	0.15	0.15
1	0	0	0.45	0	0.45
2	0	0.3375	0	0	0.3375
3	0.0625	0	0	0	0.0625
p_Y	0.0625	0.3375	0.45	0.15	1

Si noti che $p_{(X,Y)}(0, 3) = \mathbb{P}(E_0) = 0.15$ e $p_{(X,Y)}(1, 2) = \mathbb{P}(E_1) = 0.45$, dove E_0 e E_1 sono gli eventi introdotti al punto 2. Dato che $p_{(X,Y)}(3, 0)$ è dato, resta da calcolare $p_{(X,Y)}(2, 1)$ che è necessariamente pari a

$$p_{(X,Y)}(2, 1) \;=\; 1 - p_{(X,Y)}(3, 0) - p_{(X,Y)}(1, 2) - p_{(X,Y)}(0, 3) \;=\; 0.3375.$$

Esercizio 2

Siano X ed Y due variabili aleatorie discrete con densità discreta congiunta e densità marginali date da

$X \backslash Y$	0	2	4	6	p_X
0	0.2	0.1	0.2	0	0.5
3	0.1	0	0.1	0.2	0.4
7	0	0.1	0	0	0.1
p_Y	0.3	0.2	0.3	0.2	1

1) X e Y sono indipendenti?

2) Quanto vale $\mathbb{P}(X < Y)$?

3) Quanto vale $\mathbb{P}(XY > 0)$?

4) Calcolare $\mathbb{E}[XY]$ e $\mathrm{Cov}(X, Y)$.

Sia ora Z la variabile aleatoria discreta data da $Z = XY$.

5) Determinare la densità discreta di Z.

Soluzione

1) No, infatti ad esempio $p_{(X,Y)}(0,0) \neq p_X(0)\, p_Y(0)$.

2)

$$\mathbb{P}(X < Y) \;=\; p_{(X,Y)}(0,2) + p_{(X,Y)}(0,4) + p_{(X,Y)}(0,6) + p_{(X,Y)}(3,4) + p_{(X,Y)}(3,6) \;=\; 0.6.$$

3)

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(XY > 0) \;&=\; p_{(X,Y)}(3,2) + p_{(X,Y)}(3,4) + p_{(X,Y)}(3,6) \\ &\quad + p_{(X,Y)}(7,2) + p_{(X,Y)}(7,4) + p_{(X,Y)}(7,6) \;=\; 0.4. \end{aligned}$$

4)

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[X] \;&=\; 0 \cdot 0.5 + 3 \cdot 0.4 + 7 \cdot 0.1 \;=\; 1.9, \\ \mathbb{E}[Y] \;&=\; 0 \cdot 0.3 + 2 \cdot 0.2 + 4 \cdot 0.3 + 6 \cdot 0.2 \;=\; 2.8, \\ \mathbb{E}[XY] \;&=\; \sum_{\substack{i=0,3,7 \\ j=0,2,4,6}} i\, j\, p_{(X,Y)}(i,j) \\ &=\; 3 \cdot 4 \cdot p_{(X,Y)}(3,4) + 3 \cdot 6 \cdot p_{(X,Y)}(3,6) + 7 \cdot 2 \cdot p_{(X,Y)}(7,2) \;=\; 6.2, \\ \mathrm{Cov}(X,Y) \;&=\; \mathbb{E}[XY] - \mathbb{E}[X]\,\mathbb{E}[Y] \;=\; 0.88. \end{aligned}$$

5)

Z	0	6	12	14	18	28	42
p_Z	0.6	0	0.1	0.1	0.2	0	0

Esercizio 3

Sia X una variabile aleatoria continua con funzione di ripartizione

$$F_X(x) \;=\; \frac{1}{1+\mathrm{e}^{-x}}, \qquad \forall\, x \in \mathbb{R}.$$

Si dice che X ha distribuzione *logistica*.

1) Quanto vale $\mathbb{P}(X \geq 0)$?

2) Determinare la densità di X.

3) Calcolare $\mathbb{E}\left[\frac{2}{1+\mathrm{e}^{-X}}\right]$.

4) Qual è la densità della variabile aleatoria continua $Z = 4X + 7$?

Sia ora Y una variabile aleatoria continua con funzione di ripartizione

$$F_Y(x) \;=\; \frac{a}{3+\mathrm{e}^{-x}}, \qquad \forall\, x \in \mathbb{R},$$

dove a è un parametro reale.

5) Dato che F_Y è una funzione di ripartizione, quanto vale a? Perché?

Soluzione

1) $\mathbb{P}(X \geq 0) = 1 - F_X(0) = \frac{1}{2}$.

2)

$$f_X(x) \;=\; \frac{\mathrm{e}^{-x}}{(1+\mathrm{e}^{-x})^2}, \qquad \forall\, x \in \mathbb{R}.$$

3)

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[\frac{2}{1+\mathrm{e}^{-X}}\right] \;&=\; \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{2}{1+\mathrm{e}^{-x}}\, f_X(x)\,\mathrm{d}x \;=\; \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{2\,\mathrm{e}^{-x}}{(1+\mathrm{e}^{-x})^3}\,\mathrm{d}x \\ &=\; \left[\frac{1}{(1+\mathrm{e}^{-x})^2}\right]_{-\infty}^{+\infty} \;=\; 1.\end{aligned}$$

4) La funzione di ripartizione di Z è data da:

$$F_Z(x) \;=\; \mathbb{P}(4X+7 \leq x) \;=\; \mathbb{P}\left(X \leq \frac{x-7}{4}\right) \;=\; F_X\left(\frac{x-7}{4}\right), \qquad \forall\, x \in \mathbb{R}.$$

Quindi

$$f_Z(x) \;=\; F_Z'(x) \;=\; \frac{1}{4}\,F_X'\left(\frac{x-7}{4}\right) \;=\; \frac{1}{4}\,f_X\left(\frac{x-7}{4}\right) \;=\; \frac{1}{4}\,\frac{\mathrm{e}^{-\frac{x-7}{4}}}{\left(1+\mathrm{e}^{-\frac{x-7}{4}}\right)^2}.$$

5) Notiamo che

$$\lim_{x\to+\infty} F_Y(x) \;=\; \lim_{x\to+\infty} \frac{a}{3+\mathrm{e}^{-x}} \;=\; \frac{a}{3}.$$

Poiché F_Y è una funzione di ripartizione, deve valere che

$$\lim_{x\to+\infty} F_Y(x) \;=\; 1,$$

da cui otteniamo $a = 3$.

Esercizio 4

Si consideri una catena di Markov $(X_n)_n$ con spazio degli stati $\mathcal{S} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ e matrice di transizione

$$\Pi = \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & 0 & \frac{4}{5} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 & \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & \frac{3}{4} & 0 & \frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & 0 & 0 & \frac{3}{4} \\ 0 & 0 & \frac{3}{4} & 0 & 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{5} & 0 & 0 & \frac{2}{5} & 0 & \frac{2}{5} \end{pmatrix}.$$

1) Disegnare il grafo orientato associato alla catena di Markov.

2) Quali sono le classi comunicanti?

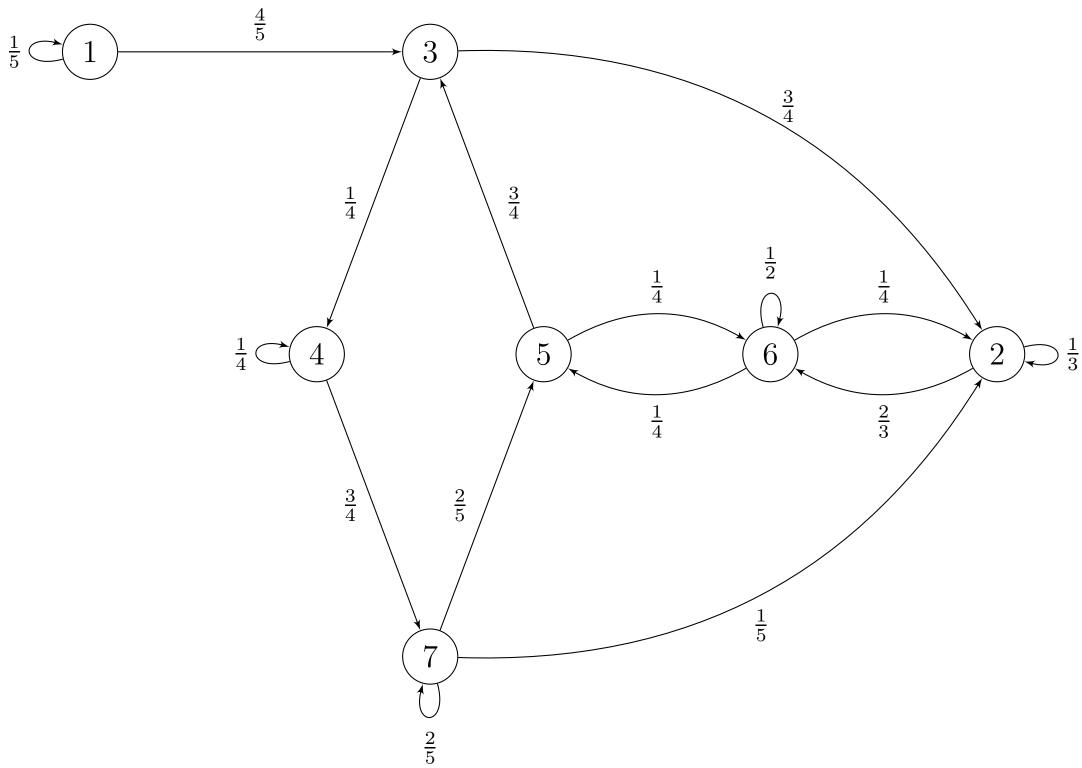
3) Calcolare $\pi_{25}^{(3)}$.

4) Calcolare $\mathbb{P}(X_3 = 3)$ sapendo che la densità discreta di X_1 è data da

X_1	1	2	3	4	5	6	7
p_{X_1}	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{10}$	0	0	0	0	$\frac{2}{5}$

Soluzione

1)



2) $\{1\}$ e $\{2,3,4,5,6,7\}$.

3)

$$\pi_{25}^{(3)} = \underbrace{\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{4}}_{\text{prob. cammino } 2\to 2\to 6\to 5} + \underbrace{\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}}_{\text{prob. cammino } 2\to 6\to 6\to 5} = \frac{5}{36} \simeq 0.1389.$$

4) $\mathbb{P}(X_3 = 3)$ è il terzo elemento del vettore riga $\vec{\boldsymbol{p}}_{\boldsymbol{X_3}} = \vec{\boldsymbol{p}}_{\boldsymbol{X_1}}\Pi^2$, quindi

$$\mathbb{P}(X_3 = 3) = \sum_{i=1}^{7} p_{X_1}(i)\,\pi_{i3}^{(2)} = \frac{1}{2}\,\pi_{13}^{(2)} + \frac{1}{10}\,\pi_{23}^{(2)} + \frac{2}{5}\,\pi_{73}^{(2)}.$$

Si ha che

$$\pi_{13}^{(2)} = \underbrace{\frac{1}{5}\cdot\frac{4}{5}}_{\text{prob. cammino } 1\to 1\to 3} = \frac{4}{25},$$

$$\pi_{23}^{(2)} = 0,$$

$$\pi_{73}^{(2)} = \underbrace{\frac{2}{5}\cdot\frac{3}{4}}_{\text{prob. cammino } 7\to 5\to 3} = \frac{3}{10}.$$

Quindi $\mathbb{P}(X_3 = 3) = \frac{1}{5} = 0.2$.