Università di Bologna - Scuola di Scienze

Esame scritto di Calcolo delle Probabilità e Statistica
30 maggio 2018

Esercizio 1

Una moneta viene lanciata tre volte. Dopodiché si lancia un dado a tre facce (su cui sono riportati i numeri interi da 1 a 3). La moneta non è truccata (quindi testa e croce sono equiprobabili), così come il dado (quindi i tre esiti possibili sono equiprobabili). Inoltre possiamo supporre che i quattro lanci (i tre lanci della moneta più il lancio del dado) siano fra loro indipendenti.

1) Si determini uno spazio campionario Ω che descriva l'esperimento aleatorio e se ne calcoli la cardinalità.

Consideriamo ora gli eventi:

A = "nei primi due lanci della moneta esce testa"
B = "nel primo lancio della moneta esce testa e nel terzo croce"
C = "nel terzo lancio della moneta esce testa e il lancio del dado dà 2"
D = "nel lancio della moneta, il cui numero corrisponde all'esito del dado, esce testa"

Si noti che l'evento D si verifica se, ad esempio, l'esito del dado è 3 e nel *terzo* lancio della moneta esce testa.

2) Si calcoli la probabilità degli eventi $A \cap B$ e $A \cup B$.

3) Gli eventi A e B sono indipendenti?

4) Si calcoli la probabilità condizionata $\mathbb{P}(C|A)$.

5) Si calcoli la probabilità dell'evento D.

Soluzione

1) Una possibile scelta per Ω è

$$\Omega \;=\; \big\{(\omega_1,\omega_2,\omega_3,k)\colon \omega_1,\omega_2,\omega_3\in\{T,C\},\; k=1,2,3\big\}$$

ovvero

$$\Omega \;=\; \{T,C\}^3\times\{1,2,3\},$$

in cui ogni esito $(\omega_1,\omega_2,\omega_3,k)$ corrisponde alla sequenza ordinata $\omega_1,\omega_2,\omega_3$ dei risultati dei tre lanci della moneta e al valore k del lancio del dado a tre facce.
La cardinalità di questo spazio campionario Ω è pari a $2^3\cdot 3 = 24$.

2) Si noti che

$$A\cap B \;=\; \text{“nei primi due lanci della moneta esce testa e nel terzo esce croce”}.$$

Quindi

$\mathbb{P}(A\cap B) = \mathbb{P}(\{\text{esce testa al } 1^{\text{o}} \text{ lancio}\}\cap\{\text{esce testa al } 2^{\text{o}} \text{ lancio}\}\cap\{\text{esce croce al } 3^{\text{o}} \text{ lancio}\})$

Dato che i lanci sono indipendenti, abbiamo che

$\mathbb{P}(A\cap B) = \mathbb{P}(\{\text{esce testa al } 1^{\text{o}} \text{ lancio}\})\mathbb{P}(\{\text{esce testa al } 2^{\text{o}} \text{ lancio}\})\mathbb{P}(\{\text{esce croce al } 3^{\text{o}} \text{ lancio}\})$

quindi $\mathbb{P}(A\cap B) = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{8}$.
Per quanto riguarda l'evento $A\cup B$, dalla formula

$$\mathbb{P}(A\cup B) \;=\; \mathbb{P}(A)+\mathbb{P}(B)-\mathbb{P}(A\cap B),$$

otteniamo $\mathbb{P}(A\cup B) = \frac{3}{8}$, dato che $\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(B) = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{4}$ ($\mathbb{P}(A)$ e $\mathbb{P}(B)$ si calcolano procedendo come per il calcolo di $\mathbb{P}(A\cap B)$).

3) No, infatti

$$\mathbb{P}(A\cap B) \;=\; \frac{1}{8} \;\neq\; \mathbb{P}(A)\,\mathbb{P}(B) \;=\; \frac{1}{16}.$$

4)

$$\mathbb{P}(C|A) \;=\; \frac{\mathbb{P}(A\cap C)}{\mathbb{P}(A)}.$$

Sappiamo che $\mathbb{P}(A) = \frac{1}{4}$, resta da calcolare $\mathbb{P}(A\cap C)$. Notiamo che

$$A\cap C \;=\; \text{“nei primi due lanci della moneta esce testa, nel terzo esce croce, il lancio del dado dà 2”}.$$

Procedendo come per il calcolo di $\mathbb{P}(A\cap B)$, si ottiene $\mathbb{P}(A\cap C) = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3} = \frac{1}{24}$.
Quindi $\mathbb{P}(C|A) = \frac{1}{6}$.
Alternativamente, dato che i lanci sono indipendenti e gli eventi A e C si riferiscono a lanci distinti, si ha che

$$\mathbb{P}(C|A) \;=\; \mathbb{P}(C) \;=\; \frac{1}{6}.$$

5) Calcoliamo $\mathbb{P}(D)$ con la formula *casi favorevoli/casi possibili*, utilizzando la spazio campionario Ω introdotto nel primo punto. Sappiamo che i *casi possibili* sono 24. Determiniamo i *casi favorevoli*, ovvero la cardinalità di D, tramite le seguenti scelte successive:

   i) scegliamo il valore k del lancio del dado a tre facce: ci sono 3 valori possibili;

   ii) scegliamo il risultato dei rimanenti due lanci della moneta: ci sono $2 \cdot 2 = 4$ modi possibili.

   In definitiva, i *casi favorevoli* sono $3 \cdot 4 = 12$, quindi $\mathbb{P}(D) = \frac{12}{24} = \frac{1}{2}$.

Esercizio 2

Sia X una variabile aleatoria con funzione di ripartizione

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & x < -3, \\ \frac{1}{3}, & -3 \leq x < -1, \\ \frac{1}{2}, & -1 \leq x < 1, \\ \frac{5}{6}, & 1 \leq x < 2, \\ 1, & x \geq 2. \end{cases}$$

1) Mostrare che X è una variabile aleatoria *discreta*.

2) Determinare supporto e densità discreta di X.

3) Quanto vale $\mathbb{P}(-1 \leq X < 2)$?

4) Calcolare $\mathbb{E}[X]$ e $\mathrm{Var}(X)$.

Sia ora $(X_n)_n$ una successione di variabili aleatorie i.i.d. tutte aventi la stessa distribuzione della variabile aleatoria X.

5) Calcolare $\mathbb{P}(X_1 + \cdots + X_{500} \leq -200)$ in modo approssimato, facendo uso del teorema centrale del limite. [Si esprima il risultato nella forma $\Phi(x)$, per qualche $x > 0$]

Soluzione

1) X è una variabile aleatoria discreta in quanto F_X è costante a tratti (o equivalentemente in quanto il suo supporto, che è dato da $\mathcal{S}_X = \{-3,-1,1,2\}$, è un insieme finito).

2) $\mathcal{S}_X = \{-3,-1,1,2\}$, mentre i valori della densità discreta p_X sono riportati nella seguente tabella:

X	-3	-1	1	2
p_X	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$

3) $\mathbb{P}(-1 \leq X < 2) = p_X(-1) + p_X(1) = \frac{1}{2}$.

4)

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[X] &= (-3)\cdot\frac{1}{3} + (-1)\cdot\frac{1}{6} + 1\cdot\frac{1}{3} + 2\cdot\frac{1}{6} = -\frac{1}{2}, \\
\mathbb{E}[X^2] &= 9\cdot\frac{1}{3} + 1\cdot\frac{1}{6} + 1\cdot\frac{1}{3} + 4\cdot\frac{1}{6} = \frac{25}{6} \simeq 4.1667, \\
\mathrm{Var}(X) &= \mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}[X]^2 = \frac{25}{6} - \frac{1}{4} = \frac{47}{12} \simeq 3.9167.
\end{aligned}$$

5) Il risultato è $\Phi(1.1299) \simeq 0.8707$. Infatti, siano $\mu = \mathbb{E}[X] = -0.5$, $\sigma^2 = \mathrm{Var}(X) = \frac{47}{12}$ e

$$\begin{aligned}
\bar{X}_n &= \frac{X_1 + \cdots + X_n}{n}, \\
\bar{Z}_n &= \frac{\bar{X}_n - \mu}{\sigma/\sqrt{n}}.
\end{aligned}$$

Dal Teorema centrale del limite sappiamo che $\bar{Z}_n$ ha approssimativamente distribuzione normale standard (ovvero $\bar{X}_n$ ha approssimativamente distribuzione normale di media μ e varianza σ^2/n). Quindi

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X_1 + \cdots + X_{500} \leq -200) &= \mathbb{P}(\bar{X}_{500} \leq -0.4) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{standardizzazione}}}{=} \mathbb{P}\left(\bar{Z}_{500} \leq \frac{-0.4+0.5}{\sqrt{\frac{47}{12}\cdot\frac{1}{\sqrt{500}}}}\right) \\
&\simeq \mathbb{P}(\bar{Z}_{500} \leq 1.1299) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{TCL}}}{\simeq} \Phi(1.1299) \simeq 0.8707.
\end{aligned}$$

Esercizio 3

Sia X una variabile aleatoria continua con densità

$$f_X(x) \;=\; \alpha\,\mathrm{e}^{-|x|} \;=\; \begin{cases} \alpha\,\mathrm{e}^{x}, & x \le 0, \\ \alpha\,\mathrm{e}^{-x}, & x \ge 0. \end{cases}$$

Si dice che X ha distribuzione *di Laplace* o *doppia esponenziale*.

1) Determinare il valore del parametro α affinché f_X sia effettivamente una densità.

2) Trovare la funzione di ripartizione F_X della variabile aleatoria X.

3) Calcolare $\mathbb{P}(-1 < X < 1)$.

4) Determinare $\mathbb{E}[X]$.

5) Qual è la densità della variabile aleatoria continua $Y = X^3$?

Soluzione

1) $\alpha = \frac{1}{2}$.

2)

$$F_X(x) \ = \ \begin{cases} \frac{1}{2}\mathrm{e}^x, & x \leq 0, \\ \frac{1}{2} + \frac{1}{2}(1 - \mathrm{e}^{-x}), & x \geq 0. \end{cases}$$

3) $\mathbb{P}(-1 < X < 1) = F_X(1) - F_X(-1) = 1 - \frac{1}{\mathrm{e}} \simeq 63.21\%$.

4)

$$\mathbb{E}[X] \ = \ \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{0} x\,\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x + \frac{1}{2}\int_{0}^{+\infty} x\,\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x \ = \ 0.$$

5) La funzione di ripartizione di Y è data da:

$$F_Y(x) \ = \ \mathbb{P}(X^3 \leq x) \ = \ \mathbb{P}(X \leq \sqrt[3]{x}) \ = \ F_X(\sqrt[3]{x}), \qquad \forall\, x \in \mathbb{R}.$$

Quindi

$$f_Y(x) \ = \ F_Y'(x) \ = \ (\sqrt[3]{x})'\, F_X'(\sqrt[3]{x}) \ = \ \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} f_X(\sqrt[3]{x}) \ = \ \frac{1}{6\sqrt[3]{x^2}}\mathrm{e}^{-|\sqrt[3]{x}|}.$$

Esercizio 4

Si consideri una catena di Markov $(X_n)_n$ con spazio degli stati $\mathcal{S} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ e matrice di transizione

$$\Pi = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{6} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{3}{4} & 0 & 0 & \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}.$$

1) Disegnare il grafo orientato associato alla catena di Markov.

2) Quali sono le classi comunicanti? La catena di Markov è irriducibile?

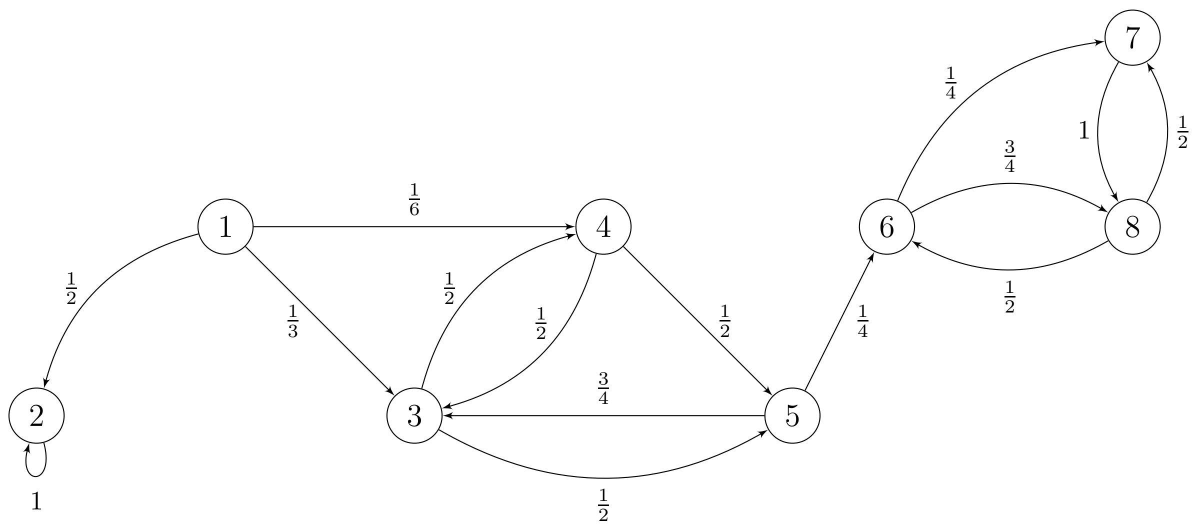
3) Calcolare $\pi_{68}^{(4)}$.

4) Calcolare $\mathbb{P}(X_3 = 4)$ sapendo che la densità discreta di X_1 è data da

X_1	1	2	3	4	5	6	7	8
p_{X_1}	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	0	0	0	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	0

Soluzione

1)



2) Le classi comunicanti sono: $\{1\}$, $\{2\}$, $\{3,4,5\}$, $\{6,7,8\}$. Dato che non c'è un'unica classe comunicante, la catena di Markov non è irriducibile.

3)

$$\pi_{68}^{(4)} = \underbrace{\frac{1}{4}\cdot 1\cdot\frac{1}{2}\cdot 1}_{\text{prob. cammino } 6\to 7\to 8\to 7\to 8} + \underbrace{\frac{1}{4}\cdot 1\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}}_{\text{prob. cammino } 6\to 7\to 8\to 6\to 8} + \underbrace{\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}\cdot 1}_{\text{prob. cammino } 6\to 8\to 6\to 7\to 8}$$
$$= \frac{5}{16} = 0.3125.$$

4) $\mathbb{P}(X_3 = 4)$ è il quarto elemento del vettore riga $\vec{\boldsymbol{p}}_{\boldsymbol{X_3}} = \vec{\boldsymbol{p}}_{\boldsymbol{X_1}}\Pi^2$, quindi

$$\mathbb{P}(X_3=4) = \sum_{i=1}^{8} p_{X_1}(i)\,\pi_{i4}^{(2)} = \frac{1}{2}\,\pi_{14}^{(2)} + \frac{1}{3}\,\pi_{24}^{(2)} + \frac{1}{12}\,\pi_{64}^{(2)} + \frac{1}{12}\,\pi_{74}^{(2)}.$$

Si ha che

$$\pi_{14}^{(2)} = \underbrace{\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}}_{\text{prob. cammino } 1\to 3\to 4} = \frac{1}{6},$$
$$\pi_{24}^{(2)} = 0,$$
$$\pi_{64}^{(2)} = 0,$$
$$\pi_{74}^{(2)} = 0.$$

Quindi $\mathbb{P}(X_3 = 4) = \frac{1}{12} \simeq 0.0833$.