FUNZIONE DI RIPARTIZIONE (CDF)

X v.a.

$$F_X : \mathbb{R} \longrightarrow [0,1]$$
$$x \longmapsto \mathbb{P}(X \leq x)$$

$$F_X(x) := \mathbb{P}(X \leq x), \qquad \forall\, x \in \mathbb{R}.$$

1) F_X è monotona (non necessariamente strettamente) crescente
2) F_X è continua a destra: $F_X(x) = \lim_{y \to x^+} F_X(y)$
3) $\lim_{x \to -\infty} F_X(x) = 0$
4) $\lim_{x \to +\infty} F_X(x) = 1$

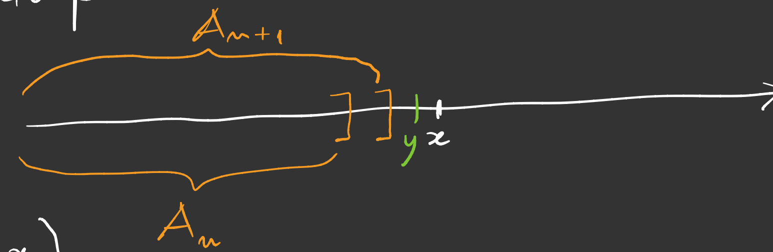
N.B.

$$A_n \uparrow A \implies \lim_n \mathbb{P}(A_n) = \mathbb{P}(A)$$
$$A_n \downarrow A \implies \lim_n \mathbb{P}(A_n) = \mathbb{P}(A)$$

$$F_X(x) = \mathbb{P}(X \le x)$$

2') $\boxed{\lim_{y \to x^-} F_X(y) = \mathbb{P}(X < x)}$, infatti

$$A_n = \left(-\infty, x - \frac{1}{n}\right]$$



$$A_n \uparrow A = \bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n = (-\infty, x)$$

$$\Longrightarrow \lim_{n \to +\infty} \underbrace{\mathbb{P}\left(X \le x - \frac{1}{n}\right)}_{F_X\left(x - \frac{1}{n}\right)} = \mathbb{P}(X < x)$$

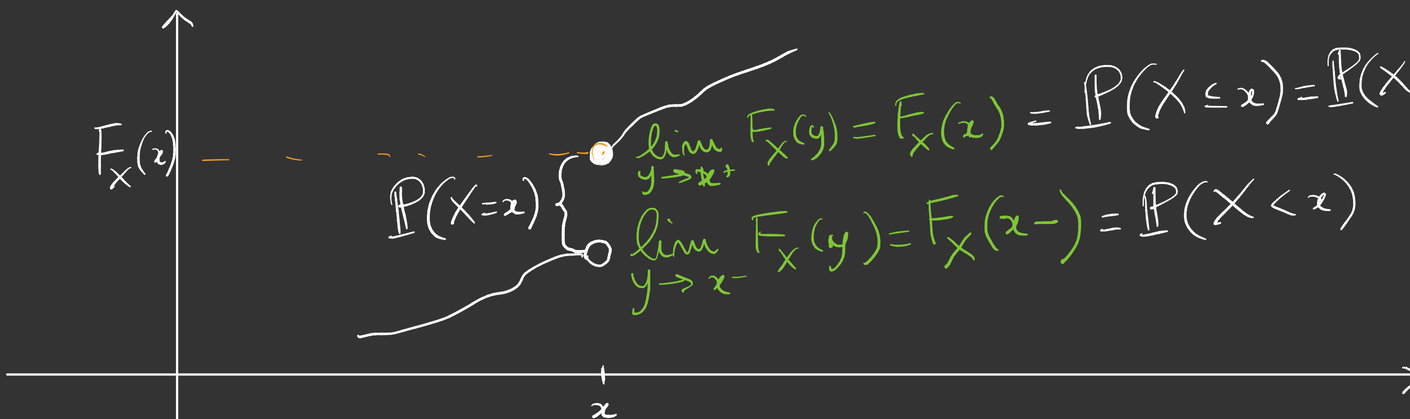
$$\Longrightarrow \lim_{n \to +\infty} F_X\left(x - \frac{1}{n}\right) = \mathbb{P}(X < x)$$

$$\Longrightarrow \lim_{y \to x^-} F_X(y) = \mathbb{P}(X < x)$$

F_X è monotona, quindi $\lim_{y \to x^-} F_X(y)$ esiste

$$\lim_{y \to x^-} F_X(y) = \mathbb{P}(X < x) = \mathbb{P}(X \le x) - \mathbb{P}(X = x) \le \mathbb{P}(X \le x) = F_X(x) = \lim_{y \to x^+} F_X(y).$$

$$\mathbb{P}(X \le x) = \mathbb{P}(X < x) + \mathbb{P}(X = x)$$



$$\lim_{y \to x^+} F_X(y) = F_X(x) = \mathbb{P}(X \le x) = \mathbb{P}(X < x) + \mathbb{P}(X = x)$$

$$\lim_{y \to x^-} F_X(y) = F_X(x-) = \mathbb{P}(X < x)$$

$$\mathbb{P}(X \le x) = \mathbb{P}(X < x) + \mathbb{P}(X = x)$$

$$\Updownarrow$$

$$F_X(x) = F_X(x-) + \mathbb{P}(X = x)$$

$$F_X(x) = F_X(x-) + \mathbb{P}(X=x), \qquad \forall x \in \mathbb{R}.$$

F_X è una funzione monotona quindi ha al più un'infinità numerabile di discontinuità (di salto).
Negli altri punti vale che

$$F_X(x) = F_X(x-) \qquad \left(\mathbb{P}(X=x)=0\right)$$

$$\Updownarrow$$

$$\mathbb{P}(X \leq x) = \mathbb{P}(X < x)$$

1) $\mathbb{P}(a < X \leq b) = \mathbb{P}(X \leq b) - \mathbb{P}(X \leq a) = F_X(b) - F_X(a)$

$$(a, b] = (-\infty, b] \setminus (-\infty, a]$$

2) $\mathbb{P}(a \leq X \leq b) = \mathbb{P}(X \leq b) - \mathbb{P}(X < a) = F_X(b) - F_X(a-)$

$$[a, b] = (-\infty, b] \setminus (-\infty, a)$$

3) $\mathbb{P}(a \leq X < b) = F_X(b-) - F_X(a-)$

4) $\mathbb{P}(a < X < b) = F_X(b-) - F_X(a)$

$$[a, b) = (-\infty, b) \setminus (-\infty, a)$$

$$\mathbb{P}(a \leq X < b) = \mathbb{P}(X < b) - \mathbb{P}(X < a)$$

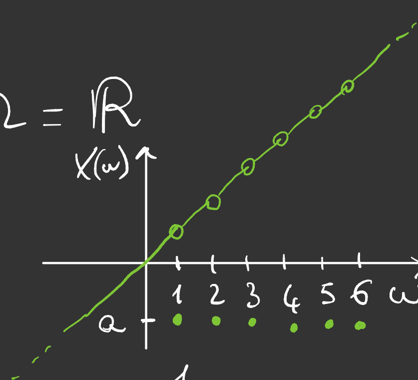
VARIABILI ALEATORIE DISCRETE

$X : \Omega \to \mathbb{R}$, $\mathrm{Im}(X)$ è un insieme finito o infinito numerabile

OSS. 1 Se Ω è discreto $\Rightarrow$

Se Ω non è discreto, ad esempio $\Omega = \mathbb{R}$

$$X(\omega) = \begin{cases} a, & \omega = 1, 2, 3, 4, 5, 6 \\ \omega, & \text{altrimenti} \end{cases}$$



$(\Omega, \mathbb{P})$, $\mathbb{P}(\{1\}) = \mathbb{P}(\{2\}) = \dots = \mathbb{P}(\{6\}) = \frac{1}{6}$

$\mathbb{P}(\{\omega\}) = 0, \quad \forall \omega \neq 1, 2, 3, 4, 5, 6$

$X = a$ q.c.

$\mathbb{P}(X = a) = 1$.

$(X = a) = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \subset \Omega = \mathbb{R}$

X deve essere v.a. discreta

$\mathrm{Im}(X) = \mathbb{R} \setminus \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

supporto: $S_X = \{a\}$ tale che $\mathbb{P}(X \in S_X) = 1$

$(X \in S_X)$ è q.c.

$\Omega = (X \in \mathrm{Im}(X))$ evento certo

Se esiste un sottoinsieme finito o infinito numerabile di $\mathrm{Im}(X)$ tale che

$(X \in S_X)$ evento quasi certo

allora X è v.a. discreta.

Definizione

Data $X : \Omega \to \mathbb{R}$ v.a., definiamo la funzione $p_X : \mathbb{R} \to [0,1]$ data da

$$p_X(x) = \mathbb{P}(X = x), \qquad \forall x \in \mathbb{R}.$$

p_X si chiama densità discreta o funzione di massa di probabilità o PMF.

Definizione

$X : \Omega \to \mathbb{R}$ v.a. Si dice che X è una variabile aleatoria discreta o v.a.d. se esiste un sottoinsieme S_X di $\mathbb{R}$, finito o infinito numerabile, quindi

$$S_X = \{x_1, \dots, x_n\} \text{ oppure } S_X = \{x_1, \dots, x_i, \dots\}$$

tale che

1) $\mathbb{P}(X = x_i) = p_X(x_i) > 0$

2) $\mathbb{P}(X \in S_X) = 1 \iff \sum_i \mathbb{P}(X = x_i) = \sum_i p_X(x_i) = 1.$

L'insieme S_X si chiama supporto di X.

TABELLA DELLA DENSITÀ DISCRETA (S_X finito)

$$S_X = \{x_1, \dots, x_n\}$$

X	x_1	x_2		x_n
p_X	$p_X(x_1)$	$p_X(x_2)$		$p_X(x_n)$

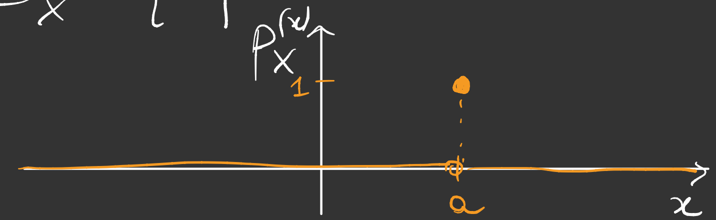
$$(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

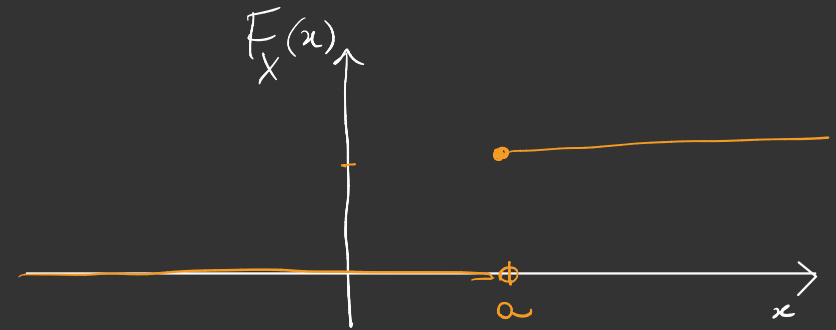
$$(p_X(x_1), p_X(x_2), \dots, p_X(x_n))$$

VARIABILI ALEATORIE COSTANTI

$X(\omega) = a, \quad \forall \omega \in \Omega$ $\qquad S_X = \{a\}$

X	a
p_X	1





VARIABILI ALEATORIE INDICATRICI

$A \subset \Omega$ e $X(\omega) = \mathbb{1}_A(\omega) = \begin{cases} 1, & \text{se } \omega \in A \\ 0, & \text{se } \omega \notin A \end{cases}$

X	0	1
p_X	$1-\mathbb{P}(A)$	$\mathbb{P}(A)$