ESERCIZIO 8 (SCHEDA 7)

Consideriamo un sistema a sei stati numerati da 1 a 6. Ad ogni istante n, si lancia un dado:

- se esce 1, il sistema si sposta nello stato 1
- se esce un numero maggiore dello stato presente, il sistema si sposta nello stato successivo
- negli altri casi, il sistema rimane nello stato presente.

1) Matrice di transizione e grafo.

2) Classi comunicanti.

3) $\pi_{34}^{(2)}$?

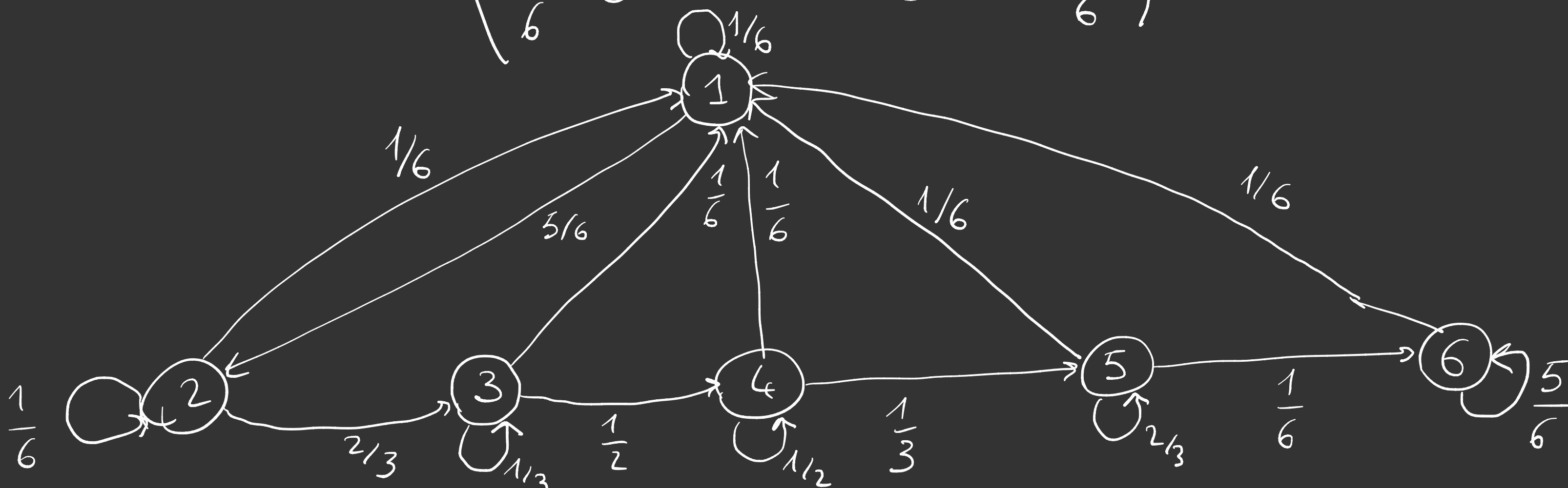
4) Distribuzione invariante.

1)

$$\Pi = \begin{pmatrix} \frac{1}{6} & \frac{5}{6} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{2}{3} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{6} & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{6} & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & 0 \\ \frac{1}{6} & 0 & 0 & 0 & \frac{2}{3} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{6} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{5}{6} \end{pmatrix}$$

2) $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

IRRIDUCIBILE



3) $$\pi_{3,4}^{(2)} = 3 \xrightarrow{\frac{1}{3}} 3 \cdot 3 \xrightarrow{\frac{1}{2}} 4 + 3 \xrightarrow{\frac{1}{2}} 4 \cdot 4 \xrightarrow{\frac{1}{2}} 4 =$$

$$= \frac{5}{12} = \mathbb{P}(X_{n+2} = 4 \mid X_n = 3), \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

4) $$\vec{\pi} = (\pi_1, \pi_2, \pi_3, \pi_4, \pi_5, \pi_6), \quad 0 \leq \pi_i \leq 1 \text{ e } \sum_{i=1}^{6} \pi_i = 1$$

$$\vec{\pi} = \vec{\pi}\,\Pi$$

$$
\begin{cases}
\pi_1 = \frac{1}{6}(\pi_1 + \dots + \pi_6) & \Longrightarrow \quad \pi_1 = \frac{1}{6} \\
\pi_2 = \frac{5}{6}\pi_1 + \frac{1}{6}\pi_2 & \Longrightarrow \quad \frac{5}{6}\pi_2 = \frac{5}{6}\pi_1 \Longrightarrow \pi_2 = \pi_1 \\
\pi_3 = \frac{2}{3}\pi_2 + \frac{1}{3}\pi_3 & \Longrightarrow \quad \frac{2}{3}\pi_3 = \frac{2}{3}\pi_2 \Longrightarrow \pi_3 = \pi_2 \\
\pi_4 = \frac{1}{2}\pi_3 + \frac{1}{2}\pi_4 & \Longrightarrow \quad \pi_4 = \pi_3 \\
\pi_5 = \frac{1}{3}\pi_4 + \frac{2}{3}\pi_5 & \Longrightarrow \quad \pi_5 = \pi_4 \\
\pi_6 = \frac{1}{6}\pi_5 + \frac{5}{6}\pi_6 & \Longrightarrow \quad \pi_6 = \pi_5 \\
\pi_1 + \pi_2 + \pi_3 + \pi_4 + \pi_5 + \pi_6 = 1
\end{cases}
$$

Distribuzione invariante: $\vec{\pi} = \left(\frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6}\right)$

ESERCIZIO 9

Sei palline, 2 bianche e 4 rosse, distribuite a caso in due urne A e B (tre palline ciascuna).

Si estraggono due palline, una da ogni urna, e si reinseriscono nell'altra urna.

X_n = "n° palline rosse nell'urna A dopo n estrazioni", $n \geq 1$

X_0 = "n° palline rosse nell'urna A nella configurazione iniziale".

1) Matrice di transizione e grafo.

2) Classi comunicanti

3) $\pi^{(3)}_{23}$

4) Legge di X_0

5) Legge di X_2 e valore atteso.

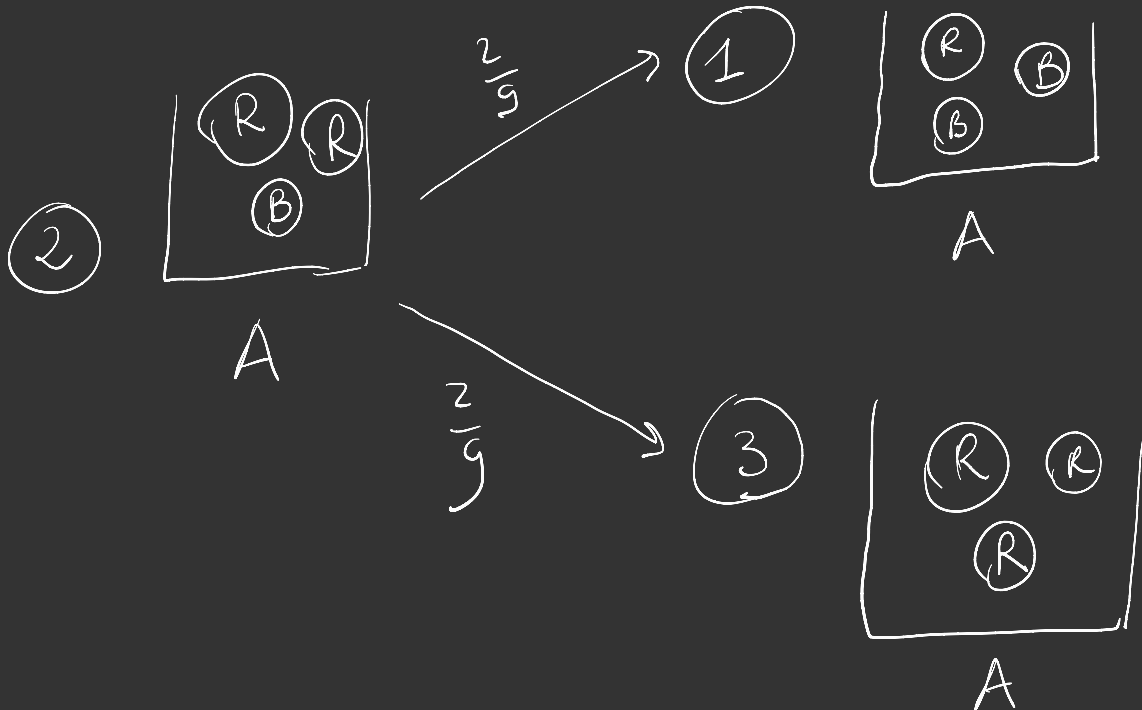
6) $\mathbb{P}(X_1 = 2 \mid X_2 = 1)$.

1) $S = \{1, 2, 3\}$

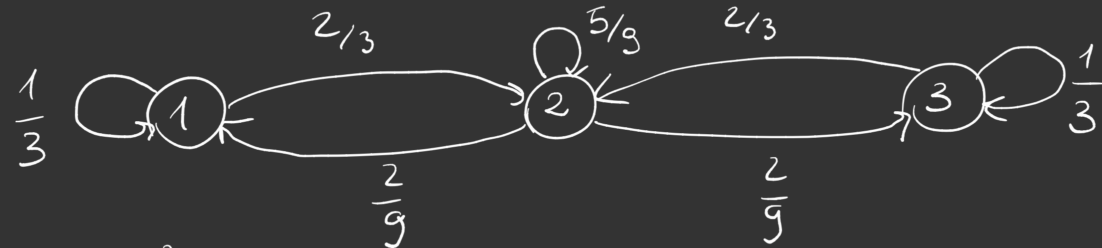
$$\Pi = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0 \\ \frac{2}{9} & \frac{5}{9} & \frac{2}{9} \\ 0 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

riga 3 :

A B



2
R
R
B
A
2/9
1
R
B
B
A
2/9
3
R
R
R
A



2) $\{1, 2, 3\}$, IRRIDUCIBILE.

3) $\pi_{23}^{(3)} = \mathbb{P}(X_{n+3} = 3 \mid X_n = 2)$

$2 \longrightarrow 2 \longrightarrow 2 \longrightarrow 3$:

$$\pi_{23}^{(3)} = \begin{cases} 2 \longrightarrow 2 \longrightarrow 2 \longrightarrow 3 \\ 2 \longrightarrow 2 \longrightarrow 3 \longrightarrow 3 \\ 2 \longrightarrow 3 \longrightarrow 3 \longrightarrow 3 \\ 2 \longrightarrow 3 \longrightarrow 2 \longrightarrow 3 \\ 2 \longrightarrow 1 \longrightarrow 2 \longrightarrow 3 \end{cases} = \frac{146}{729}$$

4) Legge di X_0?

X_0	1	2	3
p_{X_0}			

$$p_{X_0}(1) = \mathbb{P}(X_0 = 1) = \mathbb{P}\left(\begin{array}{c}\text{"1 ROSSA e 2 BIANCHE}\\ \text{nell'urna A"}\end{array}\right) =$$

$$= \frac{\binom{4}{1}\binom{2}{2}}{\binom{6}{3}} = \frac{\cancel{4}}{\frac{\cancel{6}\cdot 5\cdot \cancel{4}}{\cancel{3\cdot 2}}} = \frac{1}{5}$$

$$p_{X_0}(2) = \mathbb{P}(\text{"2 ROSSE e 1 BIANCA"}) = \frac{\binom{4}{2}\binom{2}{1}}{\binom{6}{3}} = \frac{\frac{4\cdot 3}{\cancel{2}}\cdot\cancel{2}}{20} = \frac{3}{5}$$

$$p_{X_0}(3) = \frac{1}{5}$$

X_0	1	2	3
p_{X_0}	$\frac{1}{5}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{1}{5}$

5) Legge di X_0:

X_0	1	2	3
p_{X_0}	0	1	0

Legge di X_1: $\vec{p}_{X_1} = (p_{X_1}(1), p_{X_1}(2), p_{X_1}(3))$

$$\vec{p}_{X_1} = \vec{p}_{X_0}\Pi = (0,1,0)\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0 \\ \frac{2}{9} & \frac{5}{9} & \frac{2}{9} \\ 0 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} =$$

$$= \left(\frac{2}{9}, \frac{5}{9}, \frac{2}{9}\right)$$

Legge di X_2:

$$\vec{p}_{X_2} = \vec{p}_{X_0}\Pi^2 = \frac{1}{81}(0,1,0)\begin{pmatrix} 21 & 48 & 12 \\ 16 & 49 & 16 \\ 12 & 48 & 21 \end{pmatrix} =$$

$$= \left(\frac{16}{81}, \frac{49}{81}, \frac{16}{81}\right)$$

6) $\mathbb{P}(X_1 = 2 \mid X_2 = 1) \underset{\text{Bayes}}{=} \dfrac{\mathbb{P}(X_2 = 1 \mid X_1 = 2)\, \mathbb{P}(X_1 = 2)}{\mathbb{P}(X_2 = 1)} =$

$$= \frac{\pi_{21} \cdot p_{X_1}(2)}{p_{X_2}(1)} =$$

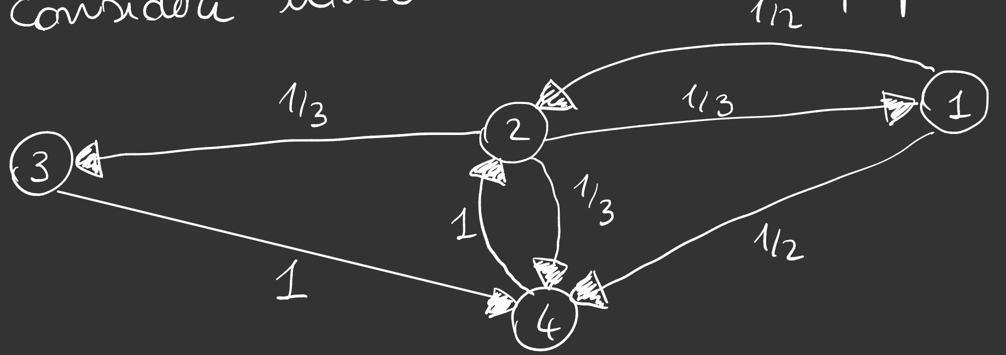
$$= \frac{\cancel{\frac{2}{9}}^{1} \cdot \cancel{\frac{5}{9}}}{\frac{\cancel{16}\,8}{\cancel{81}}} = \frac{5}{8}$$

ESERCIZIO

Si consideri una versione semplificata del web:

nodi: pagina web

archi: link



1) Distribuzione invariante

$$\Pi = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\vec{\pi} = (\pi_1, \pi_2, \pi_3, \pi_4) \quad \text{con } 0 \leq \pi_i \leq 1 \quad \text{e} \quad \sum_{i=1}^{4} \pi_i = 1.$$

$$\vec{\pi} = \vec{\pi}\,\Pi$$

$$\begin{cases} \pi_1 = \frac{1}{3}\pi_2 \\ \pi_2 = \frac{1}{2}\pi_1 + \pi_4 \\ \pi_3 = \frac{1}{3}\pi_2 \\ \pi_4 = \frac{1}{2}\pi_1 + \frac{1}{3}\pi_2 + \pi_3 \\ \pi_1 + \pi_2 + \pi_3 + \pi_4 = 1 \end{cases}$$

$$\pi_2 = x \implies \pi_1 = \pi_3 = \frac{1}{3}x$$

$$\implies \pi_4 = \pi_2 - \frac{1}{2}\pi_1 = x - \frac{1}{6}x = \frac{5}{6}x$$

$$\pi_1 + \pi_2 + \pi_3 + \pi_4 = 1 \implies \frac{1}{3}x + x + \frac{1}{3}x + \frac{5}{6}x = 1$$

$$\implies x = \frac{6}{15} = \frac{2}{5}$$

$$\vec{\pi} = \left(\frac{2}{15}, \frac{2}{5}, \frac{2}{15}, \frac{1}{3}\right)$$

$$\approx \left(0.1\overline{3}, 0.4, 0.1\overline{3}, 0.\overline{3}\right)$$

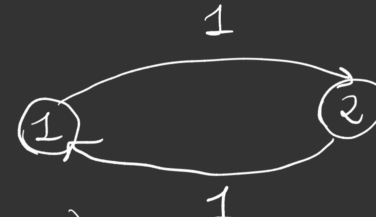
Definizione

$(X_n)_n$ catena di Markov si dice REGOLARE se esiste $n_0 \in \mathbb{N}$ tale che la matrice Π^{n_0} ha tutte le componenti > 0.

REGOLARE $\Longrightarrow$ IRRIDUCIBILE

$\not\Longleftarrow$

$$\Pi = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$



$$\Pi^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Pi^3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Pi^n = \begin{cases} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} & n \text{ PARI} \\[2ex] \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} & n \text{ DISPARI} \end{cases}$$

TEOREMA (DI CONVERGENZA ALL'EQUILIBRIO / ERGODICO)

$(X_n)_n$ catena di Markov regolare.

1) $\exists!$ distribuzione invariante $\vec{\pi} = (\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_N)$

2) $\lim_{n \to +\infty} \pi_{ij}^{(n)} = \pi_j, \quad \forall i \in S$

3) $|\pi_{ij}^{(n)} - \pi_j| \leq C q^n,$

$C > 0$ e $q \in [0, 1)$.

OSS.

2) $\Longrightarrow$ $\boxed{\lim_{n \to +\infty} p_{X_n}(j) = \pi_j}$

Infatti

$$\vec{p}_{X_n} = \vec{p}_{X_0} \Pi^n$$

Quindi

$$p_{X_n}(j) = \sum_{i=1}^{N} \pi_{ij}^{(n)} p_{X_0}(i) \xrightarrow[n \to +\infty]{} \sum_{i=1}^{N} \pi_j \, p_{X_0}(i) = \pi_j$$

X_n, per n grande, ha circa distribuzione $\vec{\pi}$

$$\vec{p}_{X_n} \simeq \vec{\pi} \quad (n \text{ grande})$$

Algoritmo PageRank di Google

Brin, Page 1998

Grafo del web:

Pagina dangling: $(0, \dots, 0) \longrightarrow \left(\frac{1}{N}, \dots, \frac{1}{N}\right)$

Regolare: $\Pi^* = d\,\Pi + (1-d)\begin{pmatrix} \frac{1}{N} & \frac{1}{N} & \dots & \frac{1}{N} \\ \frac{1}{N} & \frac{1}{N} & \dots & \frac{1}{N} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ \frac{1}{N} & \dots & \dots & \frac{1}{N} \end{pmatrix}$