CATENE DI MARKOV

ESERCIZIO 1 (SCHEDA 8)

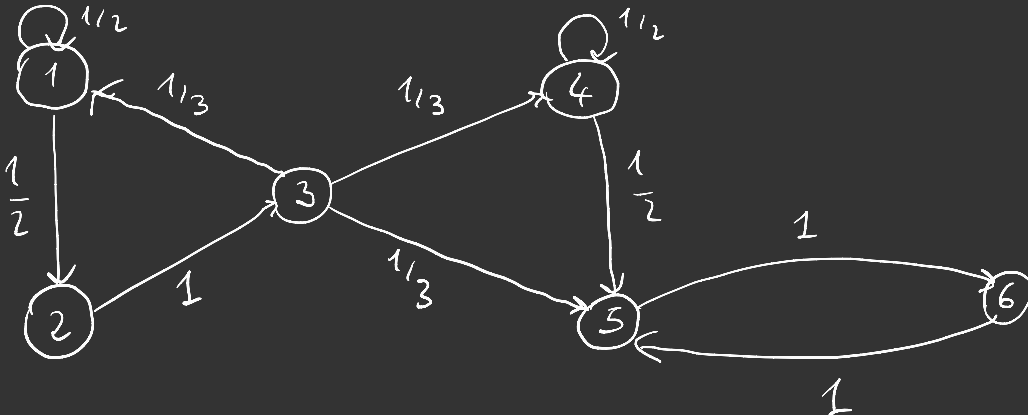
Si consideri una catena di Markov $(X_n)_{n\geq 1}$ con spazio degli stati $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ e matrice di transizione

$$\Pi = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1/3 & 0 & 0 & 1/3 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

a) grafo?

c) $\Pi^{(4)}_{12} = ?$

a)



b)

$$\pi_{12}^{(4)} := \mathbb{P}(X_{n+4} = 2 \mid X_n = 1), \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

$$\Pi^{(4)} = \left(\pi_{ij}^{(4)}\right)_{i,j=1,\dots,6} = \Pi \cdot \Pi \cdot \Pi \cdot \Pi = \Pi^4$$

$$\pi_{12}^{(4)} = \sum_{k=1}^{6} \sum_{h=1}^{6} \sum_{l=1}^{6} \pi_{1k}\, \pi_{kl}\, \pi_{lh}\, \pi_{h2}$$

$$\pi_{12}^{(4)} = \underbrace{\frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2}}_{1 \to 2 \to 3 \to 1 \to 2} + \underbrace{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}}_{1 \to 1 \to 1 \to 1 \to 2} = \frac{7}{48}$$

Ex. 2

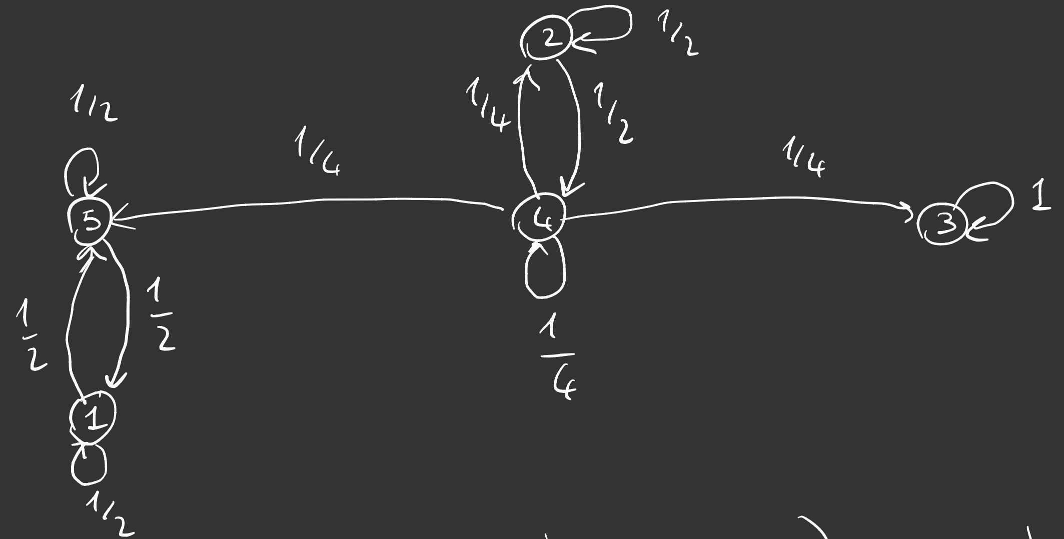
$(X_n)_{n \geq 1}$ con $S = \{1, 2, 3, 4, 5\}$

$$\Pi = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/4 & 1/4 & 1/4 & 1/4 \\ 1/2 & 0 & 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}$$

a) grafo ?

b) $\pi^{(3)}_{45} = ?$

a)



b) $\pi_{45}^{(3)} := \mathbb{P}\left(X_{n+3} = 5 \mid X_n = 4\right), \quad \forall n \geq 1.$

$$\Pi^{(3)} = \left(\pi_{ij}^{(3)}\right)_{i,j=1,\dots,5} = \Pi \cdot \Pi \cdot \Pi = \Pi^3$$

$$\pi_{45}^{(3)} = \sum_{k=1}^{5} \sum_{h=1}^{5} \pi_{4k}\, \pi_{kh}\, \pi_{h5} = 4 \xrightarrow{\frac{1}{4}} 2 \xrightarrow{\frac{1}{2}} 4 \xrightarrow{\frac{1}{4}} 5 \; +$$

$$+ \quad \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} \qquad + \quad \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} \quad +$$

$$4 \longrightarrow 4 \longrightarrow 4 \longrightarrow 5 \qquad 4 \longrightarrow 4 \longrightarrow 5 \longrightarrow 5$$

$$+ \quad \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \quad +$$

$$4 \longrightarrow 5 \longrightarrow 1 \longrightarrow 5$$

$$+ \quad \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \quad = \quad \frac{13}{64}$$

$$4 \longrightarrow 5 \longrightarrow 5 \longrightarrow 5$$

CLASSI COMUNICANTI

Definizione

$(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ catena di Markov (omogenea e a stati finiti).
Siano $i, j \in S$ (non necessariamente $i \neq j$).
Si dice j è accessibile da i (i è connesso con il nodo j) se esiste $m \geq 0$ tale che

$$\pi_{ij}^{(m)} > 0.$$

In tal caso scriviamo

$$i \rightsquigarrow j$$

N.B. È sempre vero che $i \rightsquigarrow i$, infatti $\pi_{ii}^{(0)} = 1 > 0$

Teorema

Sia $i \neq j$.

$i \rightsquigarrow j \iff \exists\, m \geq 1$ ed esiste un cammino

$i \to i_2 \to i_3 \to \cdots \to i_{m-1} \to j$

in m passi tale che

$$\Pi_{i i_2} \Pi_{i_2 i_3} \cdots \Pi_{i_{m-1} j} > 0$$

Definizione

Sia $(X_n)_{n\geq 1}$ una catena di Markov (omogenea e a stati finiti).

Siano $i, j \in S$ (non necessariamente $i \neq j$).

Gli stati i e j si dicono **comunicanti** (i è **fortemente connesso** a j) se $i \rightsquigarrow j$ e $j \rightsquigarrow i$.

In tal caso scriviamo

$$i \leftrightsquigarrow j$$

Si chiama **classe comunicante** (**componente fortemente connessa**) un sottoinsieme di S costituito da tutti gli stati tra loro comunicanti.

N.B. $i \leftrightsquigarrow i$.

Teorema

Se $i \neq j$:

$i \leftrightsquigarrow j \iff \exists$ un <u>cammino chiuso</u> che passa per i e j con probabilità positiva.

OSS. La relazione "comunicante con" è una relazione di equivalenza su S:

1) Riflessività: $i \leftrightsquigarrow i, \quad \forall i \in S$
2) Simmetrica: $i \leftrightsquigarrow j \Rightarrow j \leftrightsquigarrow i$
3) Transitiva: $i \leftrightsquigarrow j$ e $j \leftrightsquigarrow k \Rightarrow i \leftrightsquigarrow k$

$\Longrightarrow$ Le classi comunicanti sono una partizione di S, cioè ogni nodo appartiene ad una e una sola classe comunicante.

Definizione

$(X_n)_{n \geq 1}$ è irriducibile se esiste un'unica classe comunicante, che è quindi data dall'insieme S stesso.

Ex. 1 Classi comunicanti: $\{1, 2, 3\}, \{4\}, \{5, 6\}$.

Ex. 2 Classi comunicanti: $\{1, 5\}, \{2, 4\}, \{3\}$.

LEGGE DI X_n

Legge di X_1:

X_1	1	2	...	N
p_{X_1}	$p_{X_1}(1)$	$p_{X_1}(2)$		$p_{X_1}(N)$

densità discreta di X_1:

$$\vec{p}_{X_1} = \left(p_{X_1}(1), p_{X_1}(2), \dots, p_{X_1}(N) \right)$$

"La catena di Markov parte dallo stato 2": $X_1 = 2$

X_1	1	2	3	...	N
p_{X_1}	0	1	0		0

$$\vec{p}_{X_1} = (0, 1, 0, \dots, 0)$$

Teorema

$(X_n)_{n \geq 1}$ catena di Markov (omogenea e a stati finiti).

La distribuzione di X_n è data da

$$\vec{P}_{X_n} = \vec{P}_{X_1} \Pi^{n-1}$$

In generale:

$$\vec{P}_{X_{n+m}} = \vec{P}_{X_m} \Pi^n$$

DIM. $\mathbb{P}(X_n = j) = \sum_{i=1}^{N} p_{X_1}(i)\, \pi_{ij}^{(n-1)}$ vale infatti

$$\sum_{i=1}^{N} p_{X_1}(i)\, \pi_{ij}^{(n-1)} = \sum_{i=1}^{N} \mathbb{P}(X_1 = i)\, \mathbb{P}(X_n = j \mid X_1 = i) =$$

$$= \sum_{i=1}^{N} \mathbb{P}(\underbrace{X_n = j}_{A}, \underbrace{X_1 = i}_{B_i}) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{formula} \\ \text{delle} \\ \text{prob. totali}}}{=} \mathbb{P}(X_n = j) = p_{X_n}(j).$$

DISTRIBUZIONE INVARIANTE

Definizione

$\vec{\pi} = (\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_N)$ t.c.

1) $0 \le \pi_i \le 1$, $\forall i$;

2) $\sum_i \pi_i = 1$

Si dice che $\vec{\pi}$ è una distribuzione invariante o stazionaria o di equilibrio se

$$\vec{\pi} = \vec{\pi}\,\Pi \quad \text{SSE} \quad \Pi^T \vec{\pi}^T = \vec{\pi}^T;$$

OSS. $\vec{\pi}$ è distr. invariante SSE $\vec{\pi}^T$ è autovettore per Π^T con autovalore 1.
cioè $\vec{\pi}^T$ è autovettore per Π^T con autovalore 1.