TEOREMA CENTRALE DEL LIMITE (TCL)

Sia $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una successione di v.a. i.i.d. con media μ e varianza $\sigma^2>0$. Allora, posto

$$\overline{X}_n = \frac{X_1+\dots+X_n}{n}$$

$$\overline{Z}_n = \frac{\overline{X}_n-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}$$

vale che

$$\overline{Z}_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{L}} Z \sim N(0,1),$$

cioè

$$\lim_{n\to+\infty} F_{Z_n}(t) = \Phi(t) = \int_{-\infty}^{t} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}y^2}\,dy$$

OSS.

1) $$\mathbb{P}(a \le \overline{Z}_n \le b) \xrightarrow[n\to\infty]{} \Phi(b) - \Phi(a) = \int_a^b \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}y^2} dy$$

$\overline{Z}_n$ ha approx legge $N(0,1)$

$\overline{X}_n = \mu + \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \overline{Z}_n$ ha legge approx $N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right)$

2) LGN: $\overline{X}_n \xrightarrow[n\to\infty]{\mathbb{P}} \mu$ con che velocità?

$$\mathbb{E}\left[|\overline{X}_n - \mu|\right] = \mathbb{E}\left[\frac{\sigma}{\sqrt{n}} |\overline{Z}_n|\right] \underset{\infty}{\simeq} \mathbb{E}\left[\frac{\sigma}{\sqrt{n}} |Z|\right] = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \int_{-\infty}^{+\infty} |x| \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2} dx$$

$$= \frac{2\sigma}{\sqrt{n}} \int_0^{+\infty} x \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2} dx = \frac{2\sigma}{\sqrt{2\pi n}} \left[-e^{-\frac{1}{2}x^2}\right]_0^{+\infty} = \frac{\sqrt{2}\,\sigma}{\sqrt{\pi n}} = \frac{C}{\sqrt{n}}$$

DIM.

$$\lim_{n\to+\infty} F_{\overline{Z}_n}(t) = \Phi(t), \qquad \forall t\in\mathbb{R}$$

$$\iff \lim_{n\to+\infty} M_{\overline{Z}_n}(t) = M_Z(t) = e^{\frac{1}{2}t^2}, \qquad \forall t\in\mathbb{R}.$$

Per semplicità, supponiamo che $\mu=0$ e $\sigma^2=1$.

Chiamiamo M la funzione generatrice dei momenti di X_n.

Ricordiamo che

$$\begin{aligned} M(t) &= M(0) + M'(0)t + \frac{1}{2}M''(0)t^2+o(t^2) \\ &= 1 + 0 + \frac{1}{2}t^2 + o(t^2) \\ &= 1 + \frac{1}{2}t^2 + o(t^2) \end{aligned}$$

$$M_{\bar{Z}_n}(t) = \mathbb{E}\left[e^{t\bar{Z}_n}\right] = (*)$$

$$\boxed{\left(1+\frac{a}{n}\right)^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} e^a}$$

$$\bar{Z}_n = \frac{\bar{X}_n - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} = \frac{\bar{X}_n}{\frac{1}{\sqrt{n}}} = \sqrt{n}\,\bar{X}_n = \frac{X_1+\dots+X_n}{\sqrt{n}}$$

$$(*) = \mathbb{E}\left[e^{t\frac{X_1}{\sqrt{n}}+\dots+t\frac{X_n}{\sqrt{n}}}\right] =$$

$$= \mathbb{E}\left[e^{t\frac{X_1}{\sqrt{n}}}\cdots e^{t\frac{X_n}{\sqrt{n}}}\right] \underset{\uparrow}{=} \mathbb{E}\left[e^{t\frac{X_1}{\sqrt{n}}}\right]\cdots\mathbb{E}\left[e^{t\frac{X_n}{\sqrt{n}}}\right] =$$

$X_1,\dots,X_n$ INDIP.

ident. distr.

$$\overset{\downarrow}{=} M\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)\cdots M\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right) = \left(M\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)\right)^n =$$

$$\underset{\uparrow}{=} \left(1+\frac{1}{2}\frac{t^2}{n}+o\left(\frac{t^2}{n}\right)\right)^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} e^{\frac{1}{2}t^2},$$

Taylor

CATENE DI MARKOV A TEMPO DISCRETO

$(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ i.i.d.

PROCESSI STOCASTICI

A tempo discreto: $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$

A tempo continuo: $(X_t)_{t \in [0,T]}$

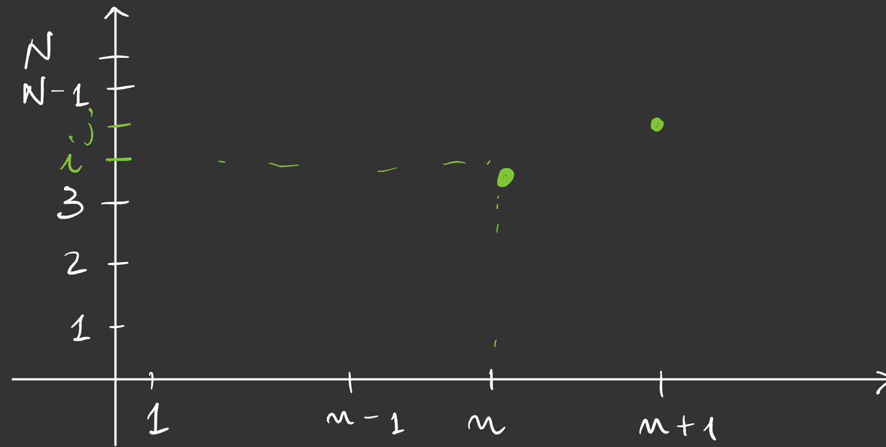
Catene di Markov: dipendenza a catena

Definizione

Si chiama CATENA DI MARKOV (A TEMPO DISCRETO) una successione di v.a. tale che

1) $X_1, \dots, X_n$ sono discrete e con "supporto" finito $S = \{1, \dots, N\}$.
S si chiama lo SPAZIO DEGLI STATI.

2) PROPRIETÀ DI MARKOV (dipendenza "a catena"):
$\forall i, j, i_1, \dots, i_{n-1} \in S$ vale che



$X_1 = i_1 \qquad X_{n-1} = i_{n-1} \qquad X_n = i \qquad X_{n+1} = j$

$$\mathbb{P}(\underbrace{X_{n+1} = j}_{\text{FUTURO}} \mid \underbrace{X_1 = i_1, \dots, X_{n-1} = i_{n-1}}_{\text{PASSATO}}, \underbrace{X_n = i}_{\text{PRESENTE}}) = \mathbb{P}(X_{n+1} = j \mid X_n = i)$$

$$\mathbb{P}(F \mid \text{Pass} \cap \text{Pres}) = \mathbb{P}(F \mid \text{Pres})$$

OSS. 1)

i.i.d. $\Longrightarrow$ proprietà di Markov

$$\mathbb{P}(X_{n+1}=j \mid X_1=i_1, \dots, X_{n-1}=i_{n-1}, X_n=i) = \mathbb{P}(X_{n+1}=j)$$

$$\mathbb{P}(X_{n+1}=j \mid X_n=i) = \mathbb{P}(X_{n+1}=j)$$

OSS. 2)

S = spazio degli stati FINITO

Si può anche prendere S infinito numerabile

Definizione

Una catena di Markov $(X_n)_{n\geq 1}$ si dice **OMOGENEA** se vale che

$$\pi_{ij}(n) = \mathbb{P}(X_{n+1} = j \mid X_n = i),$$

che è la **probabilità di transizione dallo stato i allo stato j all'istante n**, NON DIPENDE n, quindi la indichiamo con π_{ij}:

$$\pi_{ij} = \mathbb{P}(X_{n+1} = j \mid X_n = i), \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

MATRICE DI TRANSIZIONE: Π è una matrice $N \times N$

$$\Pi = (\pi_{ij})_{ij} = \begin{pmatrix} \pi_{11} & \pi_{12} & \cdots & \pi_{1N} \\ \pi_{21} & \pi_{22} & \cdots & \pi_{2N} \\ \vdots & & & \\ \pi_{N1} & \pi_{N2} & \cdots & \pi_{NN} \end{pmatrix}$$

(NON OMOGENEO: Π_n)

Teorema

Sia $\Pi = (\pi_{ij})_{ij}$ una matrice di transizione:

$$\pi_{ij} = \mathbb{P}(X_{n+1} = j \mid X_n = i), \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

1) $0 \leq \pi_{ij} \leq 1$ (perché π_{ij} è una probabilità)

2) $\sum_{j=1}^{N} \pi_{ij} = 1$

X_{n+1}	1	2	...	N
$P_{X_{n+1} \mid X_n = i}$	π_{i1}	π_{i2}		π_{iN}

$$\Pi = \begin{pmatrix} \\ \mathbb{P}(X_{n+1}=1 \mid X_n = i) \cdots\cdots \mathbb{P}(X_{n+1} = N \mid X_n = i) \\ \\ \end{pmatrix}$$

$\longleftarrow$ riga i-esima

$$X_{n+1} \mid (X_n = i)$$

DIM di 2)

$$\sum_{j=1}^{N} \pi_{ij} = \sum_{j=1}^{N} \mathbb{P}(X_{n+1}=j \mid X_n=i) =$$

$$= \sum_{j=1}^{N} \frac{\mathbb{P}(X_{n+1}=j, X_n=i)}{\mathbb{P}(X_n=i)} =$$

$$= \frac{1}{\mathbb{P}(X_n=i)} \sum_{j=1}^{N} \mathbb{P}(\underbrace{X_{n+1}=j}_{B_j}, \underbrace{X_n=i}_{A}) =$$

$$= \frac{1}{\cancel{\mathbb{P}(X_n=i)}} \cancel{\mathbb{P}(X_n=i)} = 1$$

GRAFO della CATENA DI MARKOV

1) ogni stato $i \in S$ corrisponde ad un NODO

2) se $\pi_{ij} > 0$ allora si disegna l'arco che va da i a j e si riporta π_{ij} sull'arco.

OSS:

$$\sum_{j=1}^{N} \pi_{ij} = 1 \iff$$ la somma dei pesi degli archi uscenti da uno stesso nodo è uguale a 1.

ESEMPIO 1

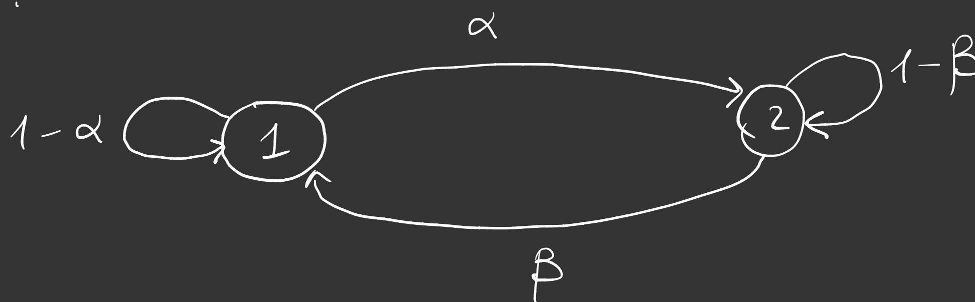
$(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ catena di Markov con $S = \{1, 2\}$

$$\Pi = \begin{pmatrix} 1-\alpha & \alpha \\ \beta & 1-\beta \end{pmatrix}$$

$0 \le \alpha \le 1$

$0 \le \beta \le 1$

GRAFO:

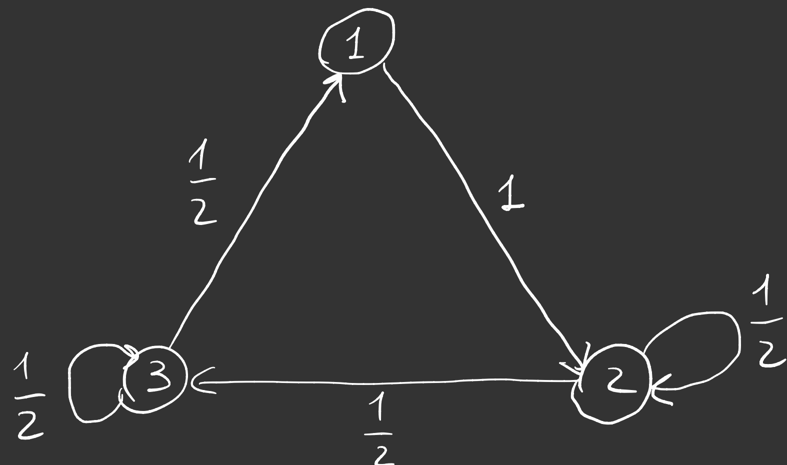


ESEMPIO 2

$$S = \{1, 2, 3\}$$

$$\Pi = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

GRAFO:



NOTAZIONI:

$1 \longrightarrow 2 \longrightarrow 3$ cammino in due passi da 1 a 3, passando per 2

$1 \rightsquigarrow 3$ esiste un cammino da 1 a 3

PROBABILITÀ DI TRANSIZIONE IN PIÙ PASSI

$$\pi_{ij}^{(m)} = \mathbb{P}(X_{n+m} = j \mid X_n = i)$$

probabilità di transizione in m passi,

con $m = 0, 1, 2, \dots$

$m = 1$

$$\pi_{ij}^{(1)} = \mathbb{P}(X_{n+1} = j \mid X_n = i) = \pi_{ij}$$

$m = 0$

$$\pi_{ij}^{(0)} = \mathbb{P}(X_n = j \mid X_n = i) = \begin{cases} 0, & i \neq j \\ 1, & i = j \end{cases}$$

matrice di transizione in n passi:

$$\Pi^{(n)} = \left(\pi_{ij}^{(n)}\right)_{ij}$$

$n = 1$ $\quad \Pi^{(1)} = \Pi$

$n = 0$ $\quad \Pi^{(0)} = I = \Pi^{0}$

Teorema

Per ogni $n = 0, 1, 2, \ldots$ vale che

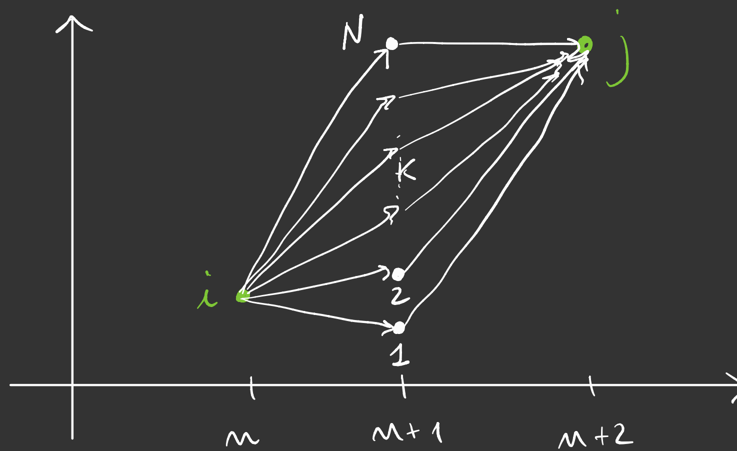
$$\Pi^{(n)} = \underbrace{\Pi \cdots \Pi}_{n \text{ volte}} = \Pi^{n}$$

DIMOSTRAZIONE

$m = 2$

$$\Pi^{(2)} = \Pi \cdot \Pi, \quad \text{cioè} \quad \pi_{ij}^{(2)} = \sum_{k=1}^{N} \pi_{ik}\,\pi_{kj}$$

$$\pi_{ij}^{(2)} = \mathbb{P}\left(X_{n+2} = j \mid X_n = i\right) = (*)$$



$$(*) = \frac{\mathbb{P}(X_{n+2} = j,\ X_n = i)}{\mathbb{P}(X_n = i)} = \sum_{k=1}^{N} \frac{\mathbb{P}(X_{n+2} = j,\ X_{n+1} = k,\ X_n = i)}{\mathbb{P}(X_n = i)}$$

form. prob. totali con $B_k = (X_{n+1} = k)$

$$= \sum_{k=1}^{N} \frac{\mathbb{P}(X_{n+2}=j, X_{n+1}=k, X_n=i)}{\mathbb{P}(X_{n+1}=k, X_n=i)} \frac{\mathbb{P}(X_{n+1}=k, X_n=i)}{\mathbb{P}(X_n=i)} =$$

$$= \sum_{k=1}^{N} \underbrace{\mathbb{P}(X_{n+2}=j \mid X_{n+1}=k, X_n=i)}_{\substack{= \mathbb{P}(X_{n+2}=j \mid X_{n+1}=k) \\ = \pi_{kj}}} \underbrace{\mathbb{P}(X_{n+1}=k \mid X_n=i)}_{= \pi_{ik}} =$$

$$= \sum_{k=1}^{N} \pi_{ik} \pi_{kj}$$

Calcolo di $\pi_{ij}^{(m)}$ a partire dal grafo:

$$\pi_{ij}^{(2)} = \sum_{k=1}^{N} \pi_{ik}\,\pi_{kj}$$

$\pi_{ik}\,\pi_{kj}$ = prodotto dei pesi dei due archi

$$i \xrightarrow{\pi_{ik}} k \xrightarrow{\pi_{kj}} j$$

$\pi_{ij}^{(m)}$ = la somma delle probabilità dei cammini costituiti da m archi che vanno da i a j

prob. di un cammino = prodotto delle probabilità lungo gli archi che lo compongono