SUCCESSIONI DI V.A.

$(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ successione di v.a.

$$\lim_{n\to+\infty} X_n(\omega) = \,?$$

1) CONVERGENZA QUASI CERTA

Diciamo che $(X_n)_n$ converge quasi certamente a X se

$$\lim_{n\to+\infty} X_n(\omega) = X(\omega), \quad \forall \omega \notin A$$

per qualche evento A tale che $\mathbb{P}(A) = 0$.

In tal caso scriviamo

$$X_n \xrightarrow[n\to+\infty]{q.c.} X$$

2) CONVERGENZA IN PROBABILITÀ

Diciamo che $(X_n)_n$ converge in probabilità a X se:

$$\forall \varepsilon > 0 \text{ vale che } \lim_{n \to +\infty} \mathbb{P}(|X_n - X| > \varepsilon) = 0.$$

In tal caso scriviamo

$$X_n \xrightarrow[n \to +\infty]{\mathbb{P}} X$$

N.B.

$$X_n \xrightarrow[n \to +\infty]{q.c.} X \Longrightarrow X_n \xrightarrow[n \to +\infty]{\mathbb{P}} X$$

3) CONVERGENZA IN LEGGE O IN DISTRIBUZIONE

Diciamo che $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge in legge o in distribuzione a X se

$$\lim_{n\to+\infty} F_{X_n}(y) = F_X(y),$$

per ogni y, tranne nei punti in cui F_X è discontinua.

In tal caso scriviamo

$$X_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{L}} X \quad \text{o} \quad X_n \xrightarrow[n\to+\infty]{d} X$$

N.B. $X_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathbb{P}} X \implies X_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{L}} X$

OSS. Se $X \sim N(0,1) \implies -X \sim N(0,1)$. Se $X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} X$ non è vero che $X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} -X$, invece $X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} -X$

MOMENTI DI UNA V.A.

Per ogni $K \in \mathbb{N}$ si chiama **momento di ordine K**

$$\mathbb{E}[X^K] \begin{cases} \xrightarrow{\text{DISCR.}} \sum_i x_i^K \, p_X(x_i) \\ \xrightarrow{\text{CONT.}} \int_{-\infty}^{+\infty} x^K f_X(x)\,dx \end{cases}$$

OSS.

$$Var(X) = \mathbb{E}[X^2] - \left(\mathbb{E}[X]\right)^2$$

N.B. Per poter definire il momento di ordine K si richiede che

$$\begin{cases} \text{DISCR.} & \sum_i |x_i|^K p_X(x_i) < +\infty \longrightarrow \text{SEMPRE VERO se } S_X \text{ FINITO} \\ \text{CONT.} & \int_{-\infty}^{+\infty} |x|^K f_X(x)\,dx < +\infty \longrightarrow \text{SEMPRE VERO PER } N(\mu, \sigma^2) \end{cases}$$

PER $N(0,1)$:

$$\mathbb{E}[X^k] = \int_{-\infty}^{+\infty} x^k \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2} dx$$

FUNZIONE GENERATRICE DEI MOMENTI

La funzione generatrice dei momenti di una variabile aleatoria X è data da

$$M_X(t) := \mathbb{E}[e^{tX}], \qquad \forall\, t \in \mathbb{R}.$$

$$M_X : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$t \longmapsto \mathbb{E}[e^{tX}]$$

$X \sim N(0,1)$:

$$M_X(t) = \mathbb{E}\left[e^{tX}\right] = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{tx} f_X(x)\, dx =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{tx} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2} dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(x^2 - 2tx \pm t^2)} dx =$$

$$\left[\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{1}{2}\frac{(x-\mu)^2}{\sigma^2}} dx = 1 \right] \qquad \mu = t \quad \sigma = 1$$

$$= e^{\frac{1}{2}t^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(x-t)^2} dt = e^{\frac{1}{2}t^2}, \quad \forall\, t \in \mathbb{R}$$

DERIVATE DI M_X e
MOMENTI DELLA V.A. X

$$M_X(t) = \mathbb{E}[e^{tX}] \underset{\substack{\uparrow \\ \text{DISCR.}}}{=} \sum_i e^{tx_i} p_X(x_i)$$

1) $$M_X'(t) = \mathbb{E}[X e^{tX}] = \sum_i x_i e^{tx_i} p_X(x_i)$$

$$\Longrightarrow M_X'(0) = \mathbb{E}[X]$$

2) $$M_X''(t) = \mathbb{E}[X^2 e^{tX}] \Longrightarrow M_X''(0) = \mathbb{E}[X^2]$$

$$\mathrm{Var}(X) = \mathbb{E}[X^2] - (\mathbb{E}[X])^2 = M_X''(0) - (M_X'(0))^2$$

In generale, $M_X^{(k)}(0) = \mathbb{E}[X^k]$

$$M_X(t) = \sum_{k=0}^{n} M_X^{(k)}(0) \frac{t^k}{k!} + o(t^n)$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \mathbb{E}[X^k] \frac{t^k}{k!} + o(t^n)$$

Caso $n=2$:

$$M_X(t) = \underbrace{M_X(0)}_{\to 1} + M_X'(0)\, t + \frac{1}{2} M_X''(0)\, t^2 + o(t^2)$$

$$= 1 + \mathbb{E}[X]\, t + \frac{1}{2} \mathbb{E}[X^2]\, t^2 + o(t^2)$$

$$M_X(0) = \mathbb{E}[e^0] = \mathbb{E}[1] = 1$$

Ad esempio, $X \sim N(0,1)$

$$M_X(t) = e^{\frac{1}{2}t^2}$$

$$M_X(0) = 1$$

$$M'_X(t) = t\, e^{\frac{1}{2}t^2} \Longrightarrow M'_X(0) = 0 = \mathbb{E}[X]$$

$$M''_X(t) = t^2 e^{\frac{1}{2}t^2} + 1 \cdot e^{\frac{1}{2}t^2}$$

$$\Downarrow$$

$$M''_X(0) = 1 = \mathbb{E}[X^2] = \mathrm{Var}(X)$$

FUNZIONE GENERATRICE DEI MOMENTI E LEGGE DELLA V.A. X

CDF: $F_X(t) := \mathbb{P}(X \leq t) = \mathbb{E}[\mathbb{1}_{(X \leq t)}], \ \forall t \in \mathbb{R}$

$M_X(t) := \mathbb{E}[e^{tX}]$

M_X, come F_X, caratterizza completamente la legge della v.a. X

Vale che:

$$X_n \xrightarrow[n \to +\infty]{\mathcal{L}} X \iff \lim_{n \to +\infty} M_{X_n}(t) = M_X(t), \ \forall t \in \mathbb{R}.$$

$\lim_{n \to +\infty} F_{X_n}(t) = F_X(t)$, $\forall t \in \mathbb{R}$, tranne al più nei punti di discontinuità di F_X.

LEGGE DEI GRANDI NUMERI

Lemma (DISUGUAGLIANZA DI CHEBYSHEV)

Y con media μ e varianza $\sigma^2 > 0$.

Per ogni $\varepsilon > 0$, vale che

$$\mathbb{P}(|Y-\mu| > \varepsilon) \leq \frac{\sigma^2}{\varepsilon^2}.$$

$|Y-\mu| > \varepsilon$

$\iff (Y-\mu)^2 > \varepsilon^2$

Z

DIM.

$$\sigma^2 = \mathrm{Var}(Y) := \mathbb{E}[(Y-\mu)^2] \geq \mathbb{E}[(Y-\mu)^2 \mathbb{1}_{|Y-\mu|>\varepsilon}]$$

$$\geq \mathbb{E}[\varepsilon^2 \mathbb{1}_{|Y-\mu|>\varepsilon}] = \varepsilon^2 \mathbb{E}[\mathbb{1}_{|Y-\mu|>\varepsilon}] =$$

$$= \varepsilon^2 \mathbb{P}(|Y-\mu| > \varepsilon)$$

$$\implies \sigma^2 \geq \varepsilon^2 \mathbb{P}(|Y-\mu| > \varepsilon)$$

Teorema (LGN)

Sia $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ successione di v.a. i.i.d. con media μ e varianza σ^2. Allora, posto

$$\overline{X}_n = \frac{X_1 + \dots + X_n}{n}$$

vale che

$$\overline{X}_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathbb{P}} \mu.$$

DIM. $\forall \varepsilon > 0$ vale che $\lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(|\overline{X}_n - \mu| > \varepsilon) = 0$.

$$\mathbb{P}(|\overline{X}_n - \mu| > \varepsilon) \overset{\text{Chebyshev}}{\leq} \frac{Var(\overline{X}_n)}{\varepsilon^2} = \frac{Var\left(\frac{X_1 + \dots + X_n}{n}\right)}{\varepsilon^2} =$$

$$= \frac{\frac{1}{n^2}\left(Var(X_1) + \dots + Var(X_n)\right)}{\varepsilon^2} = \frac{\sigma^2 \cancel{n}}{\varepsilon^2 n^{\cancel{2}}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

OSS. Kolmogorov: $\overline{X}_n \xrightarrow[n\to+\infty]{q.c.} \mu$

TEOREMA CENTRALE DEL LIMITE (De Moivre)

Teorema

Sia $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una successione di v.a. i.i.d. con media μ e varianza $\sigma^2>0$. Allora, posto

$$\overline{X}_n = \frac{X_1+\dots+X_n}{n} \longrightarrow$$ ha media μ e varianza $\frac{\sigma^2}{n}$

e

$$\overline{Z}_n = \frac{\overline{X}_n-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \longleftarrow$$ Media campionaria standardizzata

vale che

$$\overline{Z}_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{L}} Z\sim N(0,1)$$

cioè

$$\lim_{n\to+\infty} F_{Z_n}(t) = \Phi(t) = \int_{-\infty}^{t}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}x^2}\,dx, \quad \forall t\in\mathbb{R}$$