DISTRIBUZIONE NORMALE

$X \sim N(\mu, \sigma^2)$, $\mu \in \mathbb{R}$ e $\sigma > 0$, se X è v.a. continua con densità

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{1}{2}\frac{(x-\mu)^2}{\sigma^2}}, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

μ = media $\quad \sigma^2$ = varianza.

STANDARDIZZAZIONE

$$X \sim N(\mu, \sigma^2) \implies Z = \frac{X-\mu}{\sigma} \sim N(0,1)$$

NORMALE STANDARD $N(0,1)$

$$F_Z(x) = \Phi(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}y^2} \, dy \longrightarrow \begin{cases} \Phi(0) = \frac{1}{2} \\ \Phi(-x) = -\Phi(x) + 1 \end{cases}$$

ESERCIZIO

Un apparecchio dosatore riempie delle provette da 10 cl.
Assumiamo che la quantità di liquido versata

$$X \sim N(9.99, (0.012)^2).$$

a) Trovare la percentuale di provette fatte traboccare.
[Si esprima il risultato nella forma $1 - \Phi(x)$]

b) Determinare ℓ in modo che la percentuale di provette che contengono una quantità di liquido inferiore a ℓ sia pari al 10%.
[Si usi che $\Phi^{-1}(0.1) \approx -1.282$.]

a) $\mathbb{P}(X > 10) = \int_{10}^{+\infty} f_X(x)\,dx = F_X(+\infty) - F_X(10) =$

$= 1 - F_X(10)$

STANDARDIZZO

$$\mathbb{P}(X > 10) \stackrel{\downarrow}{=} \mathbb{P}\Big(\underbrace{\frac{X-\mu}{\sigma}}_{Z} > \frac{10-\mu}{\sigma}\Big) =$$

$$= \mathbb{P}\Big(Z > \frac{10-\mu}{\sigma}\Big) =$$

$$= 1 - \Phi\Big(\frac{10-\mu}{\sigma}\Big) =$$

$$= 1 - \Phi\Big(\frac{10-9.99}{0.012}\Big) \approx$$

$$\approx 1 - \Phi(0.833) \approx 0.2024 = 20.24\%$$

b) $\mathbb{P}(X < \ell) = 10\%$, quanto vale ℓ?

$= 0.1$

$$\mathbb{P}(X < \ell) = \mathbb{P}(X \le \ell) = F_X(\ell) = 0.1$$

$$\Updownarrow$$

$$\ell = F_X^{-1}(0.1)$$

STANDARDIZZO

$$\mathbb{P}(X < \ell) \overset{\downarrow}{=} \mathbb{P}\left(\frac{X-\mu}{\sigma} < \frac{\ell-\mu}{\sigma}\right) = \underbrace{\mathbb{P}\left(Z < \frac{\ell-\mu}{\sigma}\right)}_{\Phi\left(\frac{\ell-\mu}{\sigma}\right)} = 0.1$$

$$\Phi\left(\frac{\ell-\mu}{\sigma}\right) = 0.1$$

$$\Longrightarrow \frac{\ell-\mu}{\sigma} = \Phi^{-1}(0.1)$$

$$\Longrightarrow \ell = \mu + \sigma \Phi^{-1}(0.1) = 9.99 + (0.012) \cdot \underbrace{\Phi^{-1}(0.1)}_{-1.282} \simeq 9.9746\,\mathrm{cl}$$

$\Phi(x)$	0.00	0.01	…	0.09
0.0				
0.1		$\Phi(0.11)$		

VETTORI ALEATORI

Definizione

$(\Omega, \mathbb{P})$ spazio di probabilità.

Una funzione

$$(X, Y) : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

è un vettore aleatorio bidimensionale.

Una funzione

$$X = (X_1, \dots, X_n) : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

è un vettore aleatorio (n-dimensionale).

Definizione

$(\Omega, \mathbb{P})$ spazio di probabilità e $(X,Y): \Omega \to \mathbb{R}^2$.
Si chiama LEGGE o DISTRIBUZIONE di (X,Y) la probabilità

$$\mathbb{P}_{(X,Y)}: \mathcal{P}(\mathbb{R}^2) \longrightarrow [0,1]$$

definita da

$$\mathbb{P}_{(X,Y)}(B) = \mathbb{P}((X,Y) \in B) \qquad B \subset \mathbb{R}^2$$

Ad esempio: $B = H \times K$ allora

$$\mathbb{P}_{(X,Y)}(H \times K) = \mathbb{P}(X \in H, Y \in K)$$

Per dire che (X,Y) ha legge $\mathbb{P}_{(X,Y)}$ si scrive:

$$(X,Y) \sim \mathbb{P}_{(X,Y)}$$

OSS. $\mathbb{P}_{(X,Y)}$ legge congiunta di X e Y

$\mathbb{P}_X$ (legge) marginale di X

$\mathbb{P}_Y$ (legge) marginale di Y

INDIPENDENZA

$A \perp\!\!\!\perp B$ se, per definizione, $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)$

$X \perp\!\!\!\perp Y$ se gli eventi generati sono tra loro indipendenti a coppie

$\hookrightarrow (X \in B_1)$ e $(Y \in B_2)$

Definizione

Due v.a. X e Y si dicono **indipendenti** se

$$\mathbb{P}(X \in B_1, Y \in B_2) = \mathbb{P}(X \in B_1)\mathbb{P}(Y \in B_2), \quad \forall B_1, B_2 \subset \mathbb{R}.$$

$$\mathbb{P}_{(X,Y)}(B_1 \times B_2) = \mathbb{P}_X(B_1)\mathbb{P}_Y(B_2)$$

CONGIUNTA si fattorizza nel prodotto delle MARGINALI

Definizione

n variabili aleatorie $X_1, \dots, X_n$ si dicono indipendenti

se
$$\mathbb{P}(X_1 \in B_1, \dots, X_n \in B_n) = \prod_{i=1}^{n} \mathbb{P}(X_i \in B_i),$$

per ogni $B_i \subset \mathbb{R}$.

$$X \perp\!\!\!\perp Y : \mathbb{P}(X \in B_1, Y \in B_2) = \mathbb{P}(X \in B_1)\mathbb{P}(Y \in B_2)$$ INDIP. STOCASTICA

DIPENDENZA DETERMINISTICA:

$$Y = f(X)$$

Teorema

$X \perp\!\!\!\perp Y \implies \nexists\, f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ t.c. $Y = f(X)$, a meno che $Y =$ costante, in tal caso $f(x) =$ costante.

Lemma

$X \perp\!\!\!\perp Y$ e $f, g: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \implies f(X) \perp\!\!\!\perp g(Y)$.

DIM.

$$\mathbb{P}(\underbrace{f(X) \in B_1}_{X \in f^{-1}(B_1)}, \underbrace{g(Y) \in B_2}_{Y \in g^{-1}(B_2)}) = \mathbb{P}(f(X) \in B_1)\,\mathbb{P}(g(Y) \in B_2)$$

$$\mathbb{P}(X \in \underbrace{f^{-1}(B_1)}_{\bar{B}_1}, Y \in \underbrace{g^{-1}(B_2)}_{\bar{B}_2}) = \mathbb{P}(X \in f^{-1}(B_1))\,\mathbb{P}(Y \in g^{-1}(B_2))$$

DIM. $\Longrightarrow$

$$X \perp\!\!\!\perp Y, \quad \exists f: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \text{ t.c. } Y = f(X)$$

$$\Longrightarrow Y = \text{cost. e } f = \text{cost.}$$

Lemma

$$X \perp\!\!\!\perp Y \overset{\Downarrow}{\Longrightarrow} f(X) \perp\!\!\!\perp Y \quad (g(y) = y)$$

$$\Updownarrow$$

$$f(X) \perp\!\!\!\perp f(X) = Y$$

$Y \perp\!\!\!\perp Y \iff Y = \text{costante}$, infatti

$$\mathbb{P}(Y \in B_1, Y \in B_1) = \mathbb{P}(Y \in B_1)\mathbb{P}(Y \in B_1)$$

$$\uparrow$$

$$B_2 = B_1$$

$$\hookrightarrow \mathbb{P}(Y \in B_1) = \mathbb{P}(Y \in B_1)^2$$

$$x = x^2 \begin{cases} \nearrow 0 \\ \searrow 1 \end{cases} \Longrightarrow Y = \text{cost.}$$

VETTORI ALEATORI DISCRETI

Definizione

Un vettore aleatorio (X,Y) si dice **discreta** se X e Y sono v.a. discrete.

$X \to S_X$, $Y \to S_Y$

$$S_X \times S_Y$$

La funzione $p_{(X,Y)} : \mathbb{R}^2 \to [0,1]$ data da

$$p_{(X,Y)}(x,y) = \mathbb{P}(X=x, Y=y), \quad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,$$

si chiama **densità discreta congiunta** di X e Y.

$\left.\begin{matrix} p_X \\ p_Y \end{matrix}\right\}$ **marginali**

Teorema

(X,Y) vettore aleatorio discreto

1) $p_{(X,Y)}(x,y) = 0, \quad \forall (x,y) \notin S_X \times S_Y;$

$S_X = \{x_1, \dots, x_i, \dots\}$

$S_Y = \{y_1, \dots, y_j, \dots\}$

2) $\sum_i \sum_j p_{(X,Y)}(x_i, y_j) = 1,$

$\sum_{i,j}$

3) $$\mathbb{P}((X,Y) \in B) = \sum_{\substack{i,j: \\ (x_i,y_j)\in B}} p_{(X,Y)}(x_i,y_j)$$

Teorema $(p_X, p_Y, p_{(X,Y)})$ (dalla congiunta alle marginali)

(X, Y) vettore aleatorio discreto.

1) $$p_X(x_i) = \sum_j p_{(X,Y)}(x_i, y_j), \quad x_i \in S_X,$$

2) $$p_Y(y_j) = \sum_i p_{(X,Y)}(x_i, y_j), \quad y_j \in S_Y.$$

DIM. 1) $$\mathbb{P}(X = x_i) \underset{\uparrow}{=} \sum_j \mathbb{P}(X = x_i, Y = y_j)$$

FORMULA DELLE PROB. TOTALI

$A = (X = x_i)$, $\quad B_j = (Y = y_j)$

$B_1, \dots, B_m$ partizione di Ω

TABELLA DELLA DENSITÀ DISCRETA CONGIUNTA (S_X, S_Y sono finiti)

$$S_X = \{x_1, \dots, x_n\}, \quad S_Y = \{y_1, \dots, y_m\}$$

$X \backslash Y$	y_1	y_2		y_m	p_X
x_1	$p_{(X,Y)}(x_1, y_1)$				$p_X(x_1)$
x_2		$p_{(X,Y)}(x_2, y_2)$			$p_X(x_2)$
x_n					$p_X(x_n)$
p_Y	$p_Y(y_1)$	$p_Y(y_2)$		$p_Y(y_m)$	1

INDIPENDENZA

X \ Y	0	1	P_X
0	1/4	1/4	1/2
1	1/4	1/4	1/2
P_Y	1/2	1/2	1

$X \perp\!\!\!\perp Y$

X \ Y	0	1	P_X
0	1/2	0	1/2
1	0	1/2	1/2
P_Y	1/2	1/2	1

$Y = X \quad , \quad Y = X^2$

Teorema

(X, Y) vettore aleatorio discreto.

$$X \perp\!\!\!\perp Y \iff p_{(X,Y)}(x_i, y_j) = p_X(x_i)\, p_Y(y_j), \quad \forall x_i \in S_X,\ y_j \in S_Y. \quad (*)$$

DIM.

$\Longrightarrow$ $X \perp\!\!\!\perp Y$, cioè $\mathbb{P}(X \in B_1, Y \in B_2) = \mathbb{P}(X \in B_1)\mathbb{P}(Y \in B_2)$

Se $B_1 = \{x_i\}$ e $B_2 = \{y_j\}$ $\Longrightarrow$ $(*)$

$$\Longleftarrow \quad \mathbb{P}(X \in B_1, Y \in B_2) = \sum_{\substack{i,j \\ x_i \in B_1, y_j \in B_2}} p_{(X,Y)}(x_i, y_j) \overset{(*)}{=} \sum_{\substack{i,j \\ x_i \in B_1, y_j \in B_2}} p_X(x_i)\, p_Y(y_j) =$$

$$= \Bigg(\sum_{\substack{i \\ x_i \in B_1}} p_X(x_i)\Bigg)\Bigg(\sum_{\substack{j \\ y_j \in B_2}} p_Y(y_j)\Bigg) = \mathbb{P}(X \in B_1)\mathbb{P}(Y \in B_2).$$

ESERCIZIO

X e Y v.a. discrete con densità discreta congiunta parzialmente data da

X \ Y	−1	5	10	p_X
0	0.12	0.12	0.16	0.4
5	0.18	0.18	0.24	0.6
p_Y	0.3	0.3	0.4	1

a) Completare la tabella affinché $X \perp\!\!\!\perp Y$

b) $\mathbb{P}(X < Y)$.

c) $\mathbb{P}(|XY| \geq 5)$ e $\mathbb{P}(X+Y > 5)$.

d) $U = |XY|$ e $V = X+Y$. Congiunta e marginali di U e V.

a) $p_{(X,Y)}(0,5) = p_X(0)\,p_Y(5) \Longrightarrow p_Y(5) = \dfrac{0.12}{0.4} = 0.3$

b) $\mathbb{P}(X<Y) = \sum_{\substack{i,j:\\ x_i<y_j}} p_{(X,Y)}(x_i,y_j) = p_{(X,Y)}(0,5) +$

$+\ p_{(X,Y)}(0,10) + p_{(X,Y)}(5,10) = 0.52$

c) $\mathbb{P}(|XY| \geq 5) = \mathbb{P}(X=5) = 0.6$

d) $U = |XY|$ e $V = X+Y$

(X,Y)	(U,V)
$(0,-1)$	$(0,-1)$
$(0,5)$	$(0,5)$
$(0,10)$	$(0,10)$
$(5,-1)$	$(5,4)$
$(5,5)$	$(25,10)$
$(5,10)$	$(50,15)$

U \ V	-1	4	5	10	15	p_U
0	0.12	0	0.12	0.16	0	0.4
5	0	0.18	0	0	0	0.18
25	0	0	0	0.18	0	0.18
50	0	0	0	0	0.24	0.24
p_V	0.12	0.18	0.12	0.34	0.24	1

$S_U = \{0, 5, 25, 50\}$

$S_V = \{-1, 4, 5, 10, 15\}$

$U \perp\!\!\!\perp V$?

No ad esempio

$p_{(U,V)}(0,-1) \neq p_U(0)\, p_V(-1)$