VARIABILI ALEATORIE CONTINUE

DENSITÀ (CONTINUA)
PDF

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

1) $f \geq 0$
2) $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = 1$

V.A.C. $\quad X : \Omega \to \mathbb{R}$ t.c. $\exists f_X : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ che verifica 1) e 2), inoltre

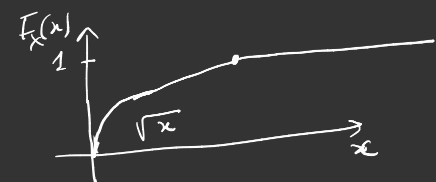
$$\mathbb{P}(X \in B) = \int_B f_X(x)\,dx$$

CONSEGUENZE:

1) $p_X(x) = \mathbb{P}(X = x) = 0 \quad \left(= \int_x^x f_X(y)\,dy\right)$

2) $F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(y)\,dy, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$

V.A.D.	V.A.C.
(PMF) densità discreta	densità (continua) (PDF)
p_X	f_X
$\mathbb{P}(X\in B)=\sum_{i:x_i\in B} p_X(x_i)$	$\mathbb{P}(X\in B) = \int_B f_X(x)\,dx$
CDF	CDF
$F_X(x)=\sum_{i:x_i\le x} p_X(x_i)$	$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(x)\,dx$ (funzione continua)
FUNZIONE COSTANTE A TRATTI	FUNZIONE INTEGRALE



$$F_X(x)=\begin{cases} 0, & x\le 0 \\ \sqrt{x}, & 0<x<1 \\ 1, & x\ge 1 \end{cases}$$

FUNZIONI ASSOLUTAMENTE CONTINUE

VAC si chiama anche V.A. ass. continua

DALLA CDF ALLA PDF

Se X è una V.A. CONTINUA CON CDF F_X allora

$$f_X(x) = F_X'(x), \quad \forall x \in \mathbb{R} \text{ in cui } F_X \text{ è derivabile}$$

Nei punti in cui F_X non è derivabile posso definire f_X in modo arbitrario.

Ex. 2.1

X v.a. continua con CDF

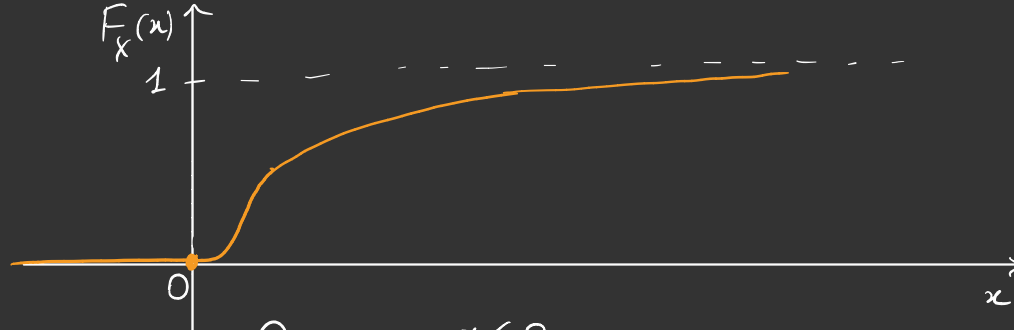
$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ (1-e^{-x})^2, & x \geq 0 \end{cases}$$

a) $f_X = ?$

b) $\mathbb{P}(X > 1) = ?$

c) $\mathbb{P}(1 < X < 2) = ?$

a)



$$f'(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 0 \\ 2(1-e^{-x})e^{-x} & x \geqslant 0 \end{cases}$$

b) $$\mathbb{P}(X > 1) = \int_1^{+\infty} f_X(x)\,dx = F_X(+\infty) - F_X(1) = \underbrace{1 - F_X(1)}_{1-(1-e^{-1})^2}$$

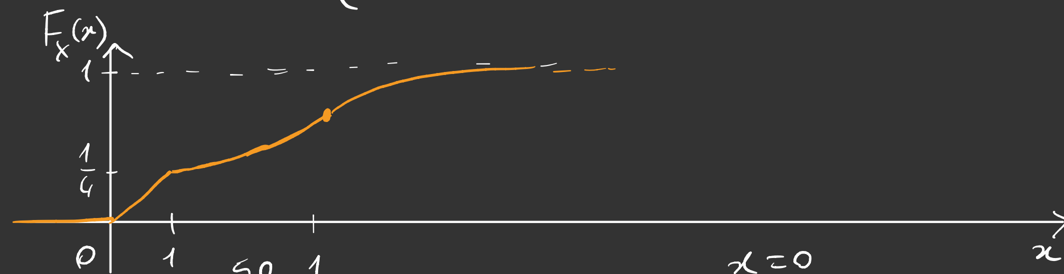
c) $$\mathbb{P}(1 < X < 2) = \int_1^2 f_X(x)\,dx = F_X(2) - F_X(1)$$
$$= (1-e^{-2})^2 - (1-e^{-1})^2$$

Ex. 2.2

X v.a. continua con CDF

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ x, & 0 \leq x \leq \frac{1}{4} \\ \left(x-\frac{1}{4}\right)^2+\frac{1}{4}, & \frac{1}{4} \leq x \leq 1 \\ \frac{3}{16}\left(1-e^{-(x-1)}\right)+\frac{13}{16} & x \geq 1 \end{cases}$$

$f_X = ?$



$$f_X(x) = \begin{cases} 0 & x = 0 \\ & x < 0 \\ 1 & 0 \leq x < \frac{1}{4} \\ 2\left(x-\frac{1}{4}\right) & \frac{1}{4} \leq x \leq 1 \\ \frac{3}{16}e^{-(x-1)} & x > 1 \end{cases}$$

FUNZIONI DI VARIABILI ALEATORIE CONTINUE

X v.a.c. e $h: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$: $Y = h(X)$

$$h(x) = 1_{\{x \geq 2\}}, \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$Y = \begin{cases} 1, & \text{se } X \geq 2 \\ 0, & \text{se } X < 2 \end{cases}$$

Se Y assume un'infinità continua di valori ($Y = e^X$)
allora determiniamo la CDF di Y:

$$F_Y(y) = \mathbb{P}(Y \leq y) = \mathbb{P}(h(X) \leq y) \underset{\substack{\uparrow \\ h \text{ invertibile}}}{=} \mathbb{P}(X \leq h^{-1}(y)) = \underbrace{= F_X(h^{-1}(y))}$$

h non è invertibile: $Y = X^2$

$y \geq 0$: $\mathbb{P}(X^2 \leq y) = \mathbb{P}(-\sqrt{y} \leq X \leq \sqrt{y}) = F_X(\sqrt{y}) - F_X(-\sqrt{y})$

ESEMPIO 1

X v.a.c. con CDF data da

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0 \\ 1-e^{-x}, & x \geq 0 \end{cases}$$

<u>densità</u> di $Y = e^X$?

$F_Y(y) = 0, \quad y \le 1$

$y > 1$:

$$F_Y(y) = \mathbb{P}(Y \le y) = \mathbb{P}(e^X \le y) \overset{y>0}{=} \mathbb{P}(\log(e^X) \le \log y) =$$

$$= \mathbb{P}(X \le \log y) = F_X(\log y) =$$

$$= \begin{cases} 0, & \log y \le 0 \\ 1-e^{-\log y}, & \log y \geq 0 \end{cases} = \begin{cases} 0, & y \le 1 \\ 1-e^{\log \frac{1}{y}}, & y \geq 1 \end{cases} = \begin{cases} 0, & y \le 1 \\ 1-\frac{1}{y}, & y \geq 1 \end{cases}$$

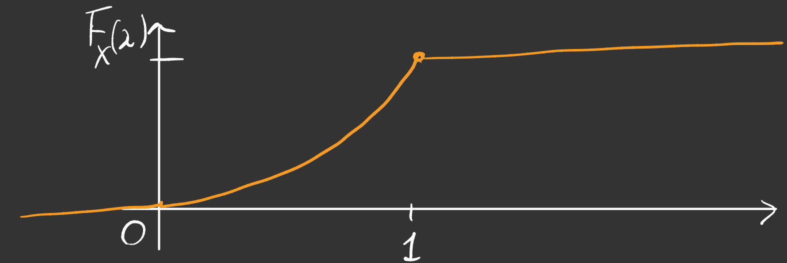
$$F_Y(y) = \begin{cases} 0, & y \le 1 \\ 1-\frac{1}{y}, & y \geq 1 \end{cases}$$

$$f_Y(y) = \begin{cases} 0 & y < 1 \\ \frac{1}{y^2} & y \geq 1 \end{cases}$$

ESEMPIO 2

X v.a.c. con CDF data da

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0 \\ ax^2, & 0 \le x \le 1 \\ 1, & x \ge 1 \end{cases}$$



parametro $a \in \mathbb{R}$ da determinarsi

F_X è CDF di una v.a.c.

1) monotona crescente
2) continua a destra
3) $\lim_{x \to -\infty} F_X(x) = 0$
4) $\lim_{x \to +\infty} F_X(x) = 1$
5) CONTINUA $\longrightarrow$ $a = 1$

$Y = X^4$ densità?

$$S_X = [0,1] \qquad Y = X^4 \longrightarrow S_Y = [0,1]$$

$$F_Y(y) = \begin{cases} 0, & y \le 0 \\ \sqrt{y} & 0 < y < 1 \\ 1, & y \ge 1 \end{cases} \Longrightarrow f_Y(y) = \begin{cases} 0 & y \le 0 \\ \frac{1}{2\sqrt{y}} & 0 < y < 1 \\ 0 & y \ge 1 \end{cases}$$

$$0 < y < 1: \quad F_Y(y) = \mathbb{P}(X^4 \le y) \overset{y \ge 0}{=} \mathbb{P}(-\sqrt[4]{y} \le X \le \sqrt[4]{y}) =$$

$$= F_X(\sqrt[4]{y}) - \underbrace{F_X(\underbrace{-\sqrt[4]{y}}_{<0})}_{=0} = F_X(\sqrt[4]{y}) = (\sqrt[4]{y})^2$$

$$= \left(y^{\frac{1}{4}}\right)^2 = y^{\frac{1}{2}} = \sqrt{y}$$

$$0 < y < \Longrightarrow 0 < \sqrt[4]{y} < 1$$

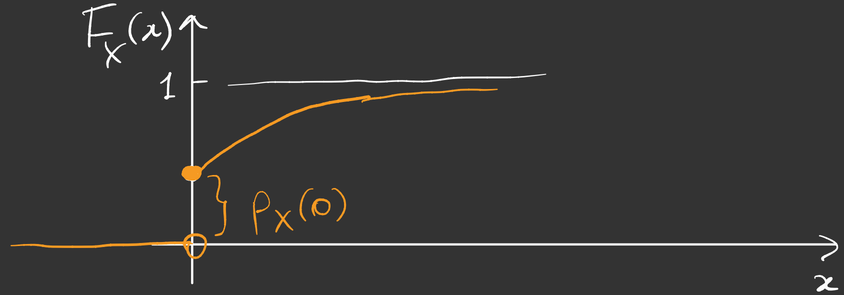
$$=$$

X = "tempo di vita di un componente elettronico"

$S_X = [0, +\infty)$

NON è discreta

$p_X(0) = \mathbb{P}(X=0) > 0$ NON è CONTINUA



X v.a.c $\Longrightarrow$ $Y = h(X)$ → discreta, continua, mista

$$Y = \begin{cases} 3, & X < \frac{1}{2} \\ X^4, & X \geq \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$S_Y = \{3\} \cup \left[\frac{1}{16}, 1\right]$$

$$\mathbb{P}(Y=3) > 0$$

$$F_Y(y) = \dots$$