Ex. 5

mazzo di 5 chiavi

$X =$ " n° di chiavi che devo provare per aprire la serratura "

1) La legge di X : $X \sim Unif(\{1,2,3,4,5\})$

2) Qual è il numero atteso di tentativi da fare? $\to \mathbb{E}[X] = 3$

3) Quanto vale la probabilità di controllare almeno 4 chiavi? $\mathbb{P}(X \geq 4) = p_X(4) + p_X(5) = \frac{2}{5}$

4) Sapendo che al primo tentativo non ho trovato la chiave giusta, qual è la probabilità di non trovarla neanche al secondo?

$\mathbb{P}(X > 2 \mid X > 1) \longrightarrow$

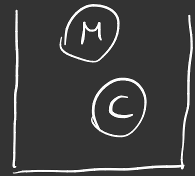
$$\mathbb{P}(X>2 \mid X>1) = \frac{\mathbb{P}((X>2)\cap(X>1))}{\mathbb{P}(X>1)} =$$

$$= \frac{\mathbb{P}(X>2,\ X>1)}{\mathbb{P}(X>1)}$$

$$= \frac{\mathbb{P}(X>2)}{\mathbb{P}(X>1)} =$$

$$= \frac{p_X(3)+p_X(4)+p_X(5)}{1-p_X(1)} = \frac{3}{4}$$

Ex. 10



→ C (termina)

→ M (reinserita nell'urna insieme ad un'altra pallina magenta)

Si fanno solo 4 estrazioni al massimo

X = "n° di estrazioni effettuate"

1) Legge di X, (S_X, p_X)

2) Qual è il valore atteso di X?

$x_1=2,\ x_2=3,\ x_3=1,\ x_4=4,\ x_5=2,\ \ldots,\ x_n=1$ dataset

$$\bar{x}_n = \frac{x_1+\dots+x_n}{n} \overset{LGN}{\approx} \mathbb{E}[X]$$

1) $S_X = \{1, 2, 3, 4\}$

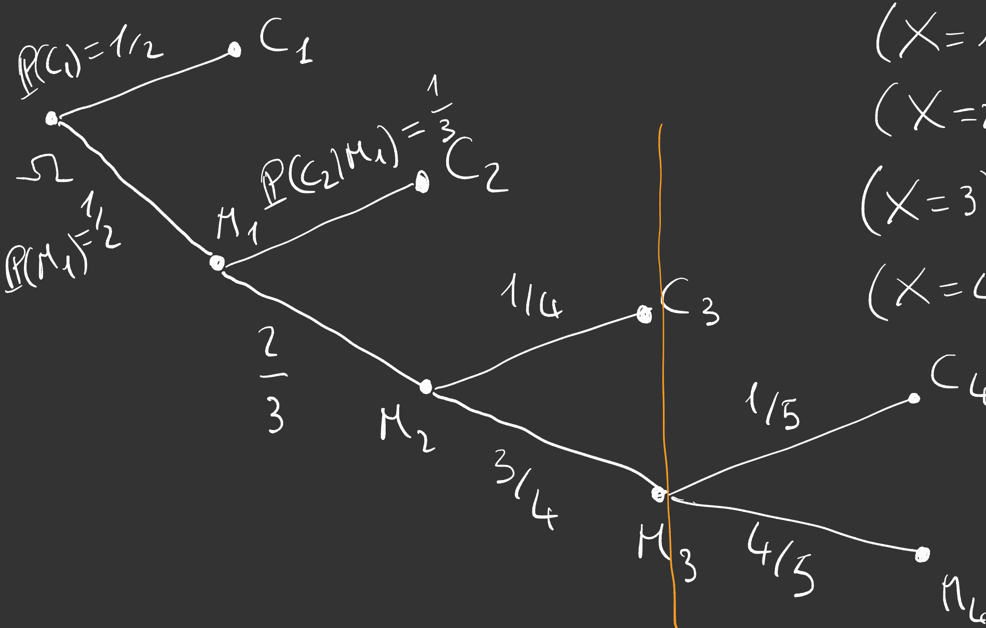
X	1	2	3	4
p_X	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{3}{4}$

$p_X(k) = \mathbb{P}(X=k), \quad k=1,\dots,4$

$A_k = (X=k)$

M_k = " estraggo magenta alla k-esima estr."

C_k = " ——— carminio ——— "



$(X=1) = C_1 \longrightarrow p_X(1) = \frac{1}{2}$

$(X=2) = M_1 \cap C_2 \longrightarrow p_X(2) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$

$(X=3) = M_1 \cap M_2 \cap C_3 \longrightarrow p_X(3) = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{12}$

$(X=4) = (M_1 \cap M_2 \cap M_3 \cap C_4) \cup (M_1 \cap M_2 \cap M_3 \cap M_4) =$

$= M_1 \cap M_2 \cap M_3$

$p_X(4) = \frac{1}{\cancel{2}} \cdot \frac{\cancel{2}}{\cancel{3}} \cdot \frac{\cancel{3}}{4} = \frac{1}{4}.$

2)

X	1	2	3	4
p_X	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{3}{4}$

$$\mathbb{E}[X] = 1 \cdot \frac{1}{2} + 2 \cdot \frac{1}{6} + 3 \cdot \frac{1}{12} + 4 \cdot \frac{1}{4} =$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + 1 = \frac{6 + 4 + 3 + 12}{12}$$

$$= \frac{25}{12} \approx 2,\ldots$$

IL PROBLEMA DEL GIORNALAIO

PROBLEMA

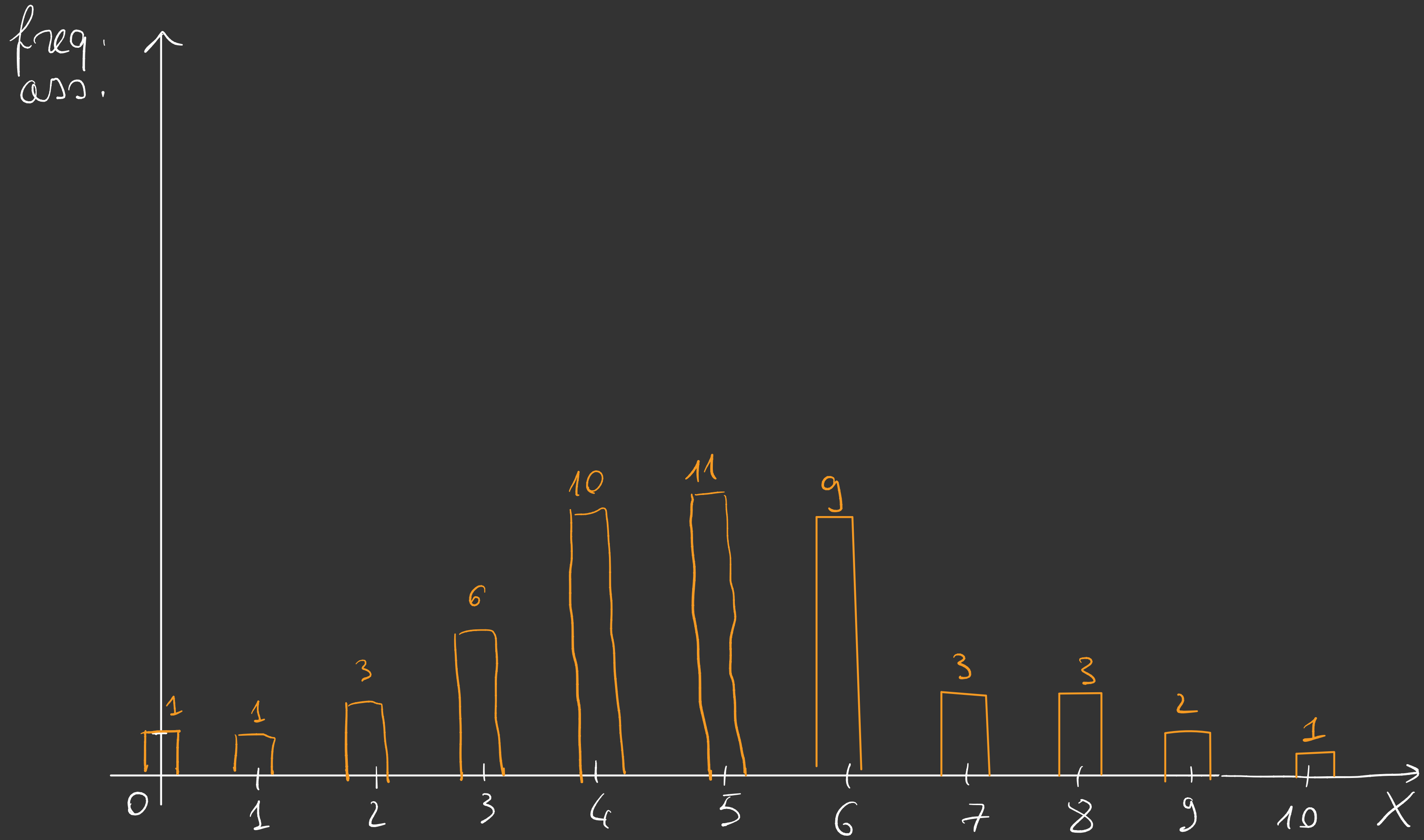
Un giornalaio vende un quotidiano a 1.50 €/copia.
Il suo guadagno 0.25 €/copia.
Trovare il n° ottimale di copie da comprare dal fornitore.

50 giorni:

$x_1 = 3$; $x_2 = 2$; $x_3 = 7$; . . . ; $x_{50} = 1$ dataset

X n° COPIE RICHIESTE	FREQUENZA ASSOLUTA	FREQUENZA RELATIVA
0	$n_0 = 1$	$f_0 = \frac{n_0}{n} = \frac{1}{50}$
1	$n_1 = 1$	$f_1 = \frac{1}{50}$
2	$n_2 = 3$	$f_2 = 3/50$
3	$n_3 = 6$	$f_3 = 6/50$
4	$n_4 = 10$	$f_4 = 10/50$
5	$n_5 = 11$	$f_5 = 11/50$
6	$n_6 = 9$	$f_6 = 9/50$
7	$n_7 = 3$	$f_7 = 3/50$
8	$n_8 = 3$	$f_8 = 3/50$
9	$n_9 = 2$	$f_9 = 2/50$
10	$n_{10} = 1$	$f_{10} = 1/50$

DIAGRAMME A BARRE / ORTOGRAMMA



$X =$ "n° copie richieste in un giorno"

X	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
p_X	$\frac{1}{50}$	$\frac{1}{50}$	$\frac{3}{50}$	$\frac{6}{50}$	$\frac{10}{50}$	$\frac{11}{50}$	$\frac{9}{50}$	$\frac{3}{50}$	$\frac{3}{50}$	$\frac{2}{50}$	$\frac{1}{50}$

$$\lim_{n \to +\infty} f_j^n = \mathbb{P}(X=j)$$ (LGN)

vel. di convergenza $\frac{1}{\sqrt{n}}$

$n = 50$

$$f_j^{50} \approx \mathbb{P}(X=j)$$

Y_K = "guadagno avendo acquistato K copie"

$K = 1, \dots, 10$

$K = 3$

$$Y_3 = h_3(X) = \begin{cases} -3 \cdot 1.25, & X = 0 \\ -3 \cdot 1.25 + 1.50 & X = 1 \\ -3 \cdot 1.25 + 2 \cdot 1.50 & X = 2 \\ -3 \cdot 1.25 + 3 \cdot 1.50 = & X \geq 3 \\ = 3 \cdot 0.25 & \end{cases}$$

$\mathbb{E}[Y_3] = 0.51$

Y_3	-3.75	-2.25	-0.75	0.75
p_{Y_3}	$p_X(0) = \frac{1}{50}$	$p_X(1) = \frac{1}{50}$	$p_X(2) = \frac{3}{50}$	$\sum_{j=3}^{10} p_X(j) = \frac{45}{50}$

Trovare il K che massimizza:

$$\mathbb{E}[Y_K] \; ; \quad \frac{\mathbb{E}[Y_K]}{Var(Y_K)}$$

k	$\mathbb{E}[Y_k]$
1	0,22
2	0,41
3	0,51
4	0.43
5	0.05
6	-0,66
7	-2.71
8	-3,87

VARIABILI ALEATORIE CONTINUE

ESEMPIO

$X =$ "tempo di vita di un componente elettronico"

"$S_X = [0, +\infty)$" , "$S_X = [0, T]$"

$X =$ "tempo impiegato da un atleta per fare i 100 m"

$x_1 = 10$; $x_2 = 10.32$; ... ; $x_n = 11.12$

"$S_X = [0, 30]$"

$$"S_X = [0, 30]"$$

$$\cancel{p_X(x) > 0 \;, \quad x \in [0, 30]}$$

$$p_X(x) = 0 \;, \quad x \notin [0, 30]$$

$$\mathbb{P}(X \in [1, 2]) = +\infty$$

1) $p_X(x) = 0 \;, \quad \forall x$

2) $\mathbb{P}(X \in [a, b]) > 0, \quad [a, b] \subset S_X$

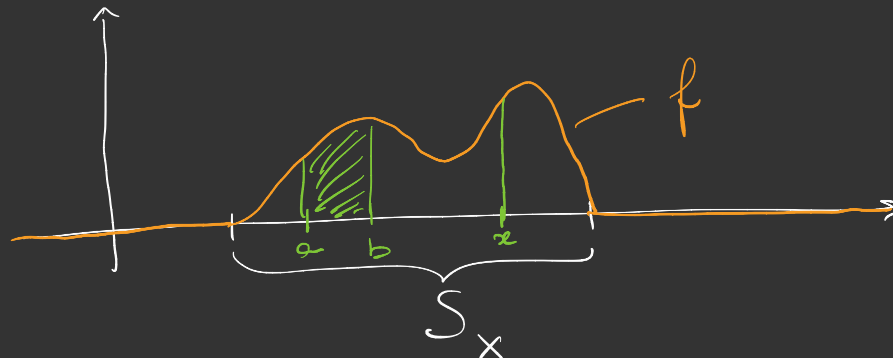
$$x = 10.34\overline{1}$$

$$10.34 \longrightarrow [10.34 - 0.005 \;, 10.34 + 0.005)$$

$$\left.\begin{array}{l} 10.335 \\ 10.336 \\ 10.337 \\ 10.338 \\ 10.339 \\ 10.340 \\ 10.341 \\ 10.342 \\ 10.343 \end{array}\right\} \longrightarrow 10.34$$

$$10.344$$

$$\mathbb{P}(X \in [a,b]) = \int_a^b f(x)\,dx > 0 \qquad [a,b] \subset S_X$$



$$p_X(x) = \mathbb{P}(X = x) = \mathbb{P}(X \in [x,x]) = \int_x^x f(y)\,dy = 0$$

Definizione

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ si chiama densità (continua) o funzione di densità di probabilità o PDF se:

1) $f(x) \geq 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}$

2) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, dx = 1.$

OSS. $0 \leq p_X(x) \leq 1$; $\quad 0 \leq f_X(x) \cancel{\leq 1}$

$$f_X(x) = \begin{cases} 50, & 0 \leq x \leq \frac{1}{50} \\ 0, & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Definizione

$X : \Omega \to \mathbb{R}$ si dice v.a.c. o variabile aleatoria continua se $\exists$ una densità (continua) $f_X : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ t.c.

$$\mathbb{P}(X \in B) = \int_B f_X(x)\,dx, \qquad B \subset \mathbb{R},$$

in particolare

$$\mathbb{P}(a \le X \le b) = \int_a^b f_X(x)\,dx = \mathbb{P}(a < X \le b) = \mathbb{P}(a < X < b)$$
$$= \mathbb{P}(a \le X < b) = \mathbb{P}(a < X < b)$$

e $\mathbb{P}(X = a) = 0$.

$$\left(\mathbb{P}(a < X \le b) = \mathbb{P}(a < X < b) + \underbrace{\cancel{\mathbb{P}(X = b)}}_{=0} \right)$$

Legge di X

$$\mathbb{P}^X(B) = \mathbb{P}(X \in B) = \int_B f_X(x)\,dx, \qquad B \subset \mathbb{R}$$

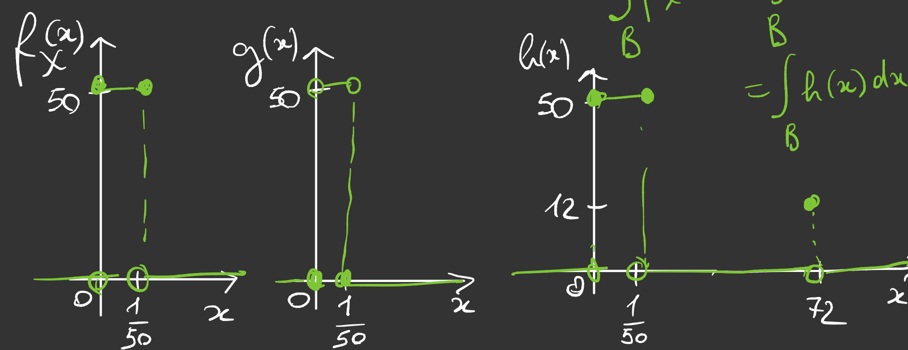
OSS. 1 densità discreta p_X è univocamente determinata da X, come anche F_X.

La densità continua f_X No!

$$f_X(x) = \begin{cases} 50, & 0 \le x \le \frac{1}{50} \\ 0, & \text{altrimenti} \end{cases} \qquad g(x) = \begin{cases} 50, & 0 < x < \frac{1}{50} \\ 0, & \text{altrimenti} \end{cases}$$

$$h(x) = \begin{cases} 50, & 0 \le x \le \frac{1}{50} \\ 12, & x = 72 \\ 0, & \text{altrimenti} \end{cases}$$

$$\int_B f_X(x)\,dx = \int_B g(x)\,dx = \int_B h(x)\,dx$$



f_X è unica a meno di modificarla in un numero finito di punti.

Per le distribuzioni notevoli c'è una versione canonica della densità.

Con riferimento alla versione canonica si definisce il supporto della v.a. X:

$$S_X = \{ x \in \mathbb{R} : f_X(x) > 0 \}$$

TEOREMA X v.a.c. con densità f_X.

1) $P_X(x) = 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}$.

2) La CDF di X è data da

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(y)\,dy, \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

F_X è $\boxed{\text{CONTINUA}}$