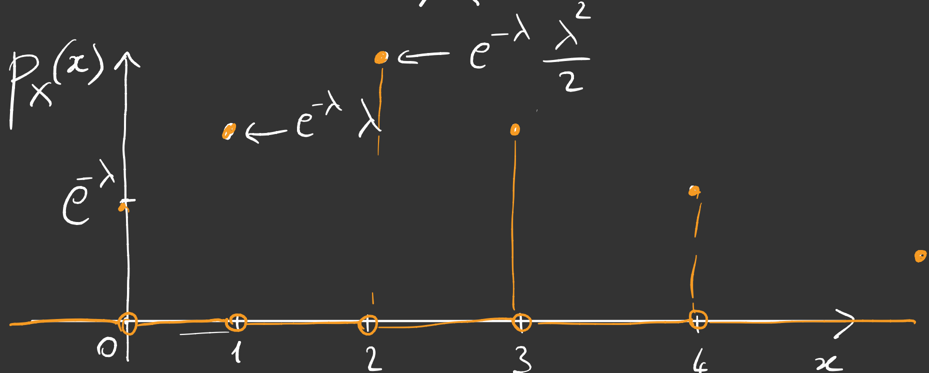
DISTRIBUZIONE DI POISSON

$X:\Omega \to \mathbb{R}$ la distribuzione di Poisson se è una v.a. discreta con $S_X=\{0,1,2,\dots\}$

$$p_X(k)=\mathbb{P}(X=k)=e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}, \qquad \forall k=0,1,2,\dots$$

$\lambda>0$ fissato

$$X\sim \text{Poisson}(\lambda)$$



$$\sum_{k=0}^{+\infty} e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}=1 \iff \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{\lambda^k}{k!}=e^{\lambda} \qquad \sum_{k=0}^{N}\frac{\lambda^k}{k!}\approx e^{\lambda}$$

$$\mathbb{E}[X] = \lambda$$

$$\mathrm{Var}(X) = \lambda$$

$$\mathbb{E}[X] = \sum_{k=0}^{+\infty} \cancel{k}\, e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{\cancel{k!}_{(k-1)!}} = \lambda \sum_{k=1}^{+\infty} e^{-\lambda} \frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!} =$$

$$\underset{h=k-1}{\overset{=}{\uparrow}} \lambda \underbrace{\sum_{h=0}^{+\infty} e^{-\lambda} \frac{\lambda^h}{h!}}_{=1} = \lambda$$

$$X \sim B(n,p), \qquad S_X = \{0, 1, \dots, n\}$$

$$p_X(k) = \mathbb{P}(X=k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}, \qquad k = 0, \dots, n$$

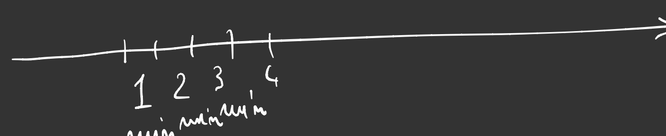
$$X = X_1 + X_2 + \dots + X_n$$

Legge dei piccoli numeri:

$$\binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \xrightarrow[\substack{p = \frac{\lambda}{n} \\ (p \to 0) \\ np = \lambda}]{n \to +\infty} e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}$$

n GRANDE e p PICCOLO

CALL CENTER



TERREMOTO

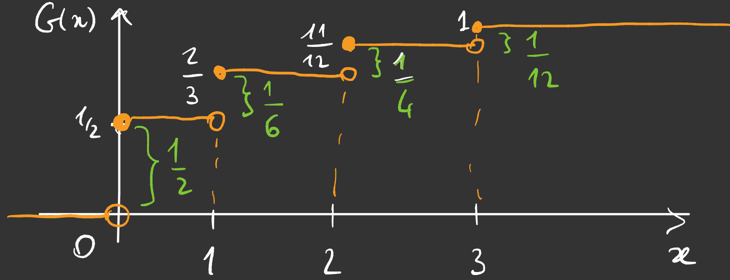
Ex. 2.1 (DISPENSA)

Sia $G : \mathbb{R} \to [0,1]$ una funzione data da

$$G(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ \frac{1}{2}, & 0 \le x < 1 \\ \frac{2}{3}, & 1 \le x < 2 \\ \frac{11}{12}, & 2 \le x < 3 \\ 1, & x \geq 3 \end{cases}$$

1) Mostrare che G è un CDF
2) Sia X una v.a. con $F_X = G$. Determinare supporto e densità discreta di X.
3) Trovare $\mathbb{P}_X$.
4) Calcolare $\mathbb{P}(X > \frac{1}{2})$ e $\mathbb{P}(X < 3)$.
5) Mostrare che $Y = (X-2)^2$ è una v.a. discreta. S_Y e p_Y?

1)



$$G \text{ è CDF} \iff \begin{cases} 1)\ G \text{ è monotona crescente} \checkmark \\ 2)\ G \text{ è continua a destra} \checkmark \\ 3)\ \lim_{x \to -\infty} G(x) = 0 \checkmark \\ 4)\ \lim_{x \to +\infty} G(x) = 1 \checkmark \end{cases}$$

2) X v.a con CDF $F_X = G$.

$$S_X = \{0, 1, 2, 3\}$$

$$p_X(K) = F_X(K) - F_X(K-)$$

X	0	1	2	3
p_X	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{12}$

3) $\mathbb{P}_X = ?$

$$\mathbb{P}_X(B) = \frac{1}{2}\delta_0(B) + \frac{1}{6}\delta_1(B) + \frac{1}{4}\delta_2(B) + \frac{1}{12}\delta_3(B)$$

4)

$$\mathbb{P}(X \in B) = \sum_{i : x_i \in B} p_X(x_i) = \sum_{\substack{i=0 \\ i \in B}}^{3} p_X(i)$$

$$\mathbb{P}\left(X > \tfrac{1}{2}\right) = \sum_{\substack{i=0 \\ i > \frac{1}{2}}}^{3} p_X(i) = p_X(1) + p_X(2) + p_X(3) =$$

$$= 1 - p_X(0) = \frac{1}{2}$$

$$\mathbb{P}(X < 3) = \sum_{\substack{i=0 \\ i < 3}}^{3} p_X(i) = p_X(0) + p_X(1) + p_X(2) =$$

$$= 1 - p_X(3) = \frac{11}{12}$$

$$\mathbb{P}(X < 3) = F_X(3-) = \frac{11}{12}$$

5) $Y = (X-2)^2$; $Y = h(X)$, $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
$x \longmapsto (x-2)^2$

$$\mathbb{E}[Y] = \mathbb{E}[h(X)] = \sum_{i=0}^{3} h(i)\, p_X(i) =$$

$$= \sum_{i=0}^{3} (i-2)^2 p_X(i) = 4 \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + 0 + \frac{1}{12} = \frac{9}{4}$$

Legge di Y $(\mathbb{P}_Y)$
(S_Y, p_Y)

X	$Y=(X-2)^2$
0	4
1	1
2	0
3	1

$$p_Y(1) = \mathbb{P}(Y=1) = p_X(1) + p_X(3)$$
$$(Y=1) = (X=1) \cup (X=3)$$

Y	0	1	4
p_Y	$p_Y(0) = p_X(2) = 1/4$	$\frac{1}{4}$	$p_Y(4) = p_X(0) = \frac{1}{2}$

$$\mathbb{E}[Y] := \sum_j y_j \, p_Y(y_j) = 0 \cdot p_Y(0) + 1 \cdot p_Y(1) + 4 \cdot p_Y(4)$$

$$= 0 + \frac{1}{4} + 4 \cdot \frac{1}{2} = \frac{9}{4}$$

Ex. 2 (Scheda 4)

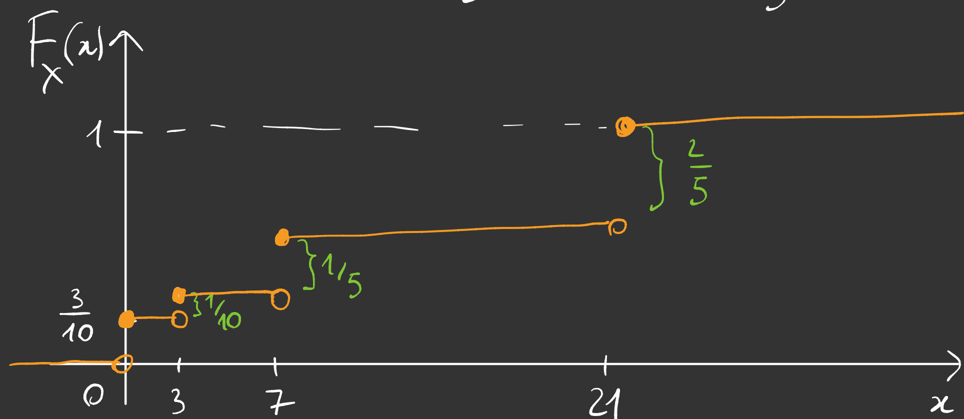
X v.a. discreta $\quad S_X = \{0, 3, 7, 21\}$

X	0	3	7	21
P_X	α	$\frac{\alpha}{3}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{2}{5}$

, $\alpha \in \mathbb{R}$

$\alpha = ?$

$$\alpha + \frac{\alpha}{3} + \frac{1}{5} + \frac{2}{5} = 1 \iff \frac{\cancel{4}^{\,2}}{3}\alpha = \frac{\cancel{2}^{\,1}}{5} \iff \alpha = \frac{3}{10}$$



$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ \frac{3}{10}, & 0 \leq x < 3 \\ \frac{2}{5}, & 3 \leq x < 7 \\ \frac{3}{5}, & 7 \leq x < 21 \\ 1, & x \geq 21 \end{cases}$$

Ex. 5

Mazzo di 5 chiavi

X = "n° di chiavi che devo provare per aprire la serratura"

1) La legge di X (S_X, p_X)
2) Qual è il numero atteso di tentativi da fare?
3) Quanto vale la probabilità di controllare almeno 4 chiavi?
4) Sapendo che al primo tentativo non ho trovato la chiave giusta, qual è la probabilità di non trovarla neanche al secondo?

1) $\Omega = D_{5,5} = P_5 = \{ (x_1, \dots, x_5) : x_i \in \{C1, C2, C3, C4, C5\} \ x_i \neq x_j \}$

$|\Omega| = 5! = 120$

$S_X = \{1, 2, 3, 4, 5\}$

$A_K = (X = k) =$ " pesco la chiave giusta alla K-esima estrazione "

$A_2 = \{ (*, C3, *, *, *) \}$

$|A_2| = 4!$

$|A_1| = |A_2| = \dots = |A_5|$

$\mathbb{P}(A_K) = \frac{4!}{5!} = \frac{1}{5}$

X	1	2	3	4	5
P_X	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$

$X \sim Unif(\{1, 2, 3, 4, 5\})$