$(\Omega, \mathbb{P})$ spazio di probabilità

Una v.a. è una funzione

$$X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$$

In generale, è necessario richiedere

$$(X \in B) = \{\omega \in \Omega : X(\omega) \in B\} \in \mathcal{F}, \quad \forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$$

Evento generato da (o associato a) una v.a. X

$$(X \in B) = \{\omega \in \Omega : X(\omega) \in B\}, \quad \forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$$

$$(X \in (-\infty, x]) = (X \leq x)$$

1) $$\mathbb{P}(X \leq x) = \mathbb{P}(X < x) + \mathbb{P}(X = x)$$

$\uparrow$

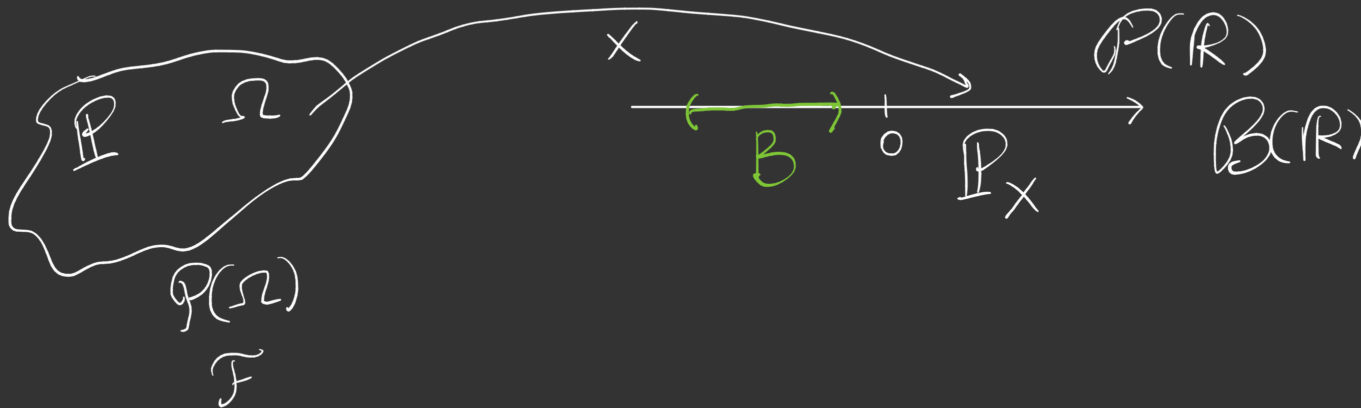
ADDITIVITÀ

$$(X \leq x) = (X < x) \uplus (X = x)$$

2) $$\mathbb{P}(X \leq x) = 1 - \mathbb{P}(X > x)$$

$$(X \leq x)^c = (X > x)$$

DISTRIBUZIONE o LEGGE di una V.A.



Definizione

Data una v.a. $X : \Omega \to \mathbb{R}$, si chiama **distribuzione** o **legge** di X la probabilità

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_X : \mathcal{P}(\mathbb{R}) &\longrightarrow [0,1] \\ B &\longmapsto \mathbb{P}(X \in B) \end{aligned}$$

$$\mathbb{P}_X(B) := \mathbb{P}(X \in B) \qquad \mathbb{P}(Y \in B)$$

VARIABILI ALEATORIE COSTANTI

$a \in \mathbb{R}$ fissato, $\quad X(\omega) = a, \quad \forall \omega \in \Omega.$

$\mathbb{P}_X = ?$ $\quad \mathbb{P}_X : \mathcal{P}(\mathbb{R}) \longrightarrow [0,1]$

$$B \longmapsto \mathbb{P}(X \in B)$$

$$(X \in B) = \begin{cases} \Omega, & \text{se } a \in B \\ \emptyset, & \text{se } a \notin B \end{cases}$$

$$\delta_a(B) = \mathbb{P}_X(B) = \begin{cases} \mathbb{P}(\Omega), & \text{se } a \in B \\ \mathbb{P}(\emptyset), & \text{se } a \notin B \end{cases} = \begin{cases} 1, & \text{se } a \in B \\ 0, & \text{se } a \notin B \end{cases}$$

$f_B(a) = \delta_a(B)$

$$\delta_a = \mathbb{P}_X$$

VARIABILI ALEATORIE INDICATRICI O BERNOULLIANE

$A \subset \Omega$, $\quad X = 1_A$

$$X(\omega) = \begin{cases} 1, & \text{se } \omega \in A \\ 0, & \text{se } \omega \notin A \end{cases}$$

$\mathbb{P}_X = ?$

$$\mathbb{P}_X : \mathcal{P}(\mathbb{R}) \longrightarrow [0,1]$$
$$B \longmapsto \mathbb{P}(X \in B)$$

$$(X \in B) = \begin{cases} \Omega & \text{se } 1 \in B,\ 0 \in B \\ A & \text{se } 1 \in B,\ 0 \notin B \\ A^c & \text{se } 1 \notin B,\ 0 \in B \\ \emptyset & \text{se } 1 \notin B,\ 0 \notin B \end{cases} \Longrightarrow \mathbb{P}_X(B) = \begin{cases} 1 & \text{se } 1 \in B,\ 0 \in B \\ \mathbb{P}(A) & \text{se } 1 \in B,\ 0 \notin B \\ \mathbb{P}(A^c) & \text{se } 1 \notin B,\ 0 \in B \\ 0, & \text{se } 1 \notin B,\ 0 \notin B \end{cases}$$

$$\mathbb{P}_X(B) = \mathbb{P}(A)\,\delta_1(B) + \mathbb{P}(A^c)\,\delta_0(B)$$

$$\mathbb{P}_X(\cdot) = \mathbb{P}(A)\,\delta_1(\cdot) + (1-\mathbb{P}(A))\,\delta_0(\cdot)$$

$$\mathbb{P}_X(B) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{x } 1\in B \text{ e } 0 \in B}}{=} \mathbb{P}(A)\cdot 1 + (1-\mathbb{P}(A))\cdot 1 = 1$$

FUNZIONE DI RIPARTIZIONE

$\mathbb{P}_X : \mathcal{P}(\mathbb{R}) \to [0,1]$, $\quad F_X : \mathbb{R} \to [0,1]$

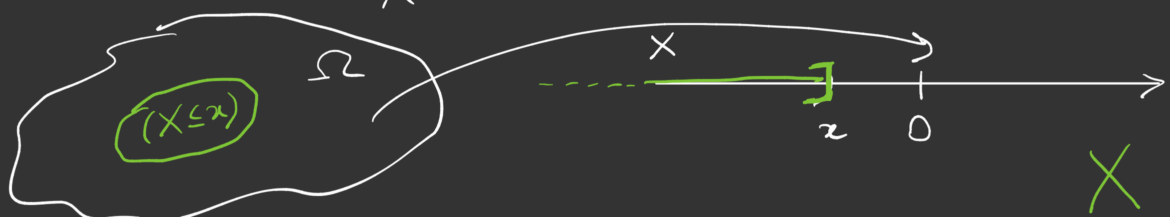
Definizione

Sia $X : \Omega \to \mathbb{R}$ una v.a. Si chiama funzione cumulativa di ripartizione o funzione di distribuzione o CDF di X la funzione

$$F_X : \mathbb{R} \to [0,1]$$

definita da

$$F_X(x) = \mathbb{P}(X \le x) = \mathbb{P}_X((-\infty, x])$$



$X \sim F_X$

conoscere $F_X \iff$ conoscere $\mathbb{P}_X$

$F_X \Longleftarrow \mathbb{P}_X$

$$F_X(x) := \mathbb{P}_X((-\infty, x]), \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

$F_X \Longrightarrow \mathbb{P}_X$: conosco $\mathbb{P}_X((-\infty, x])$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

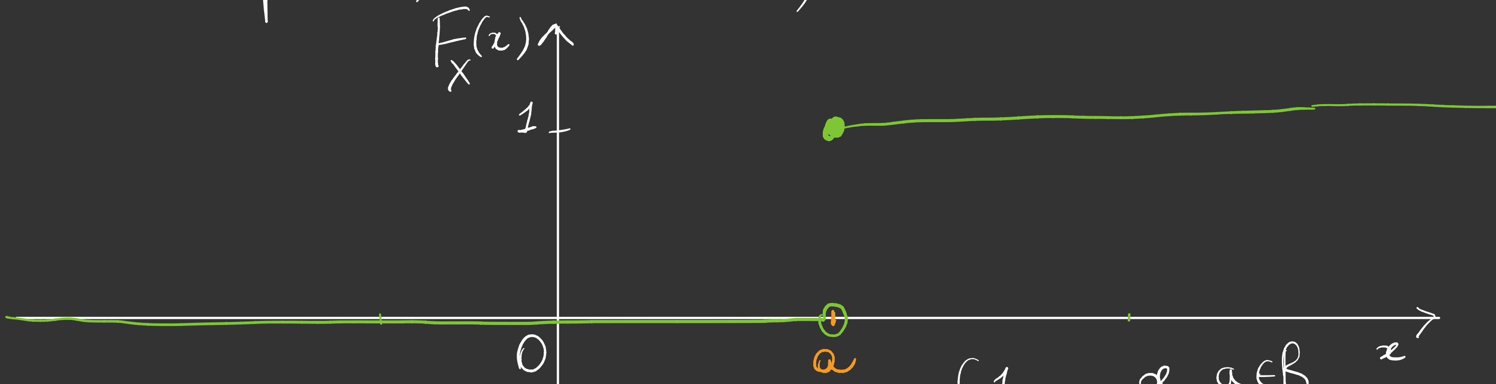
$\Longrightarrow \mathbb{P}_X((x, +\infty))$, $\forall x \in \mathbb{R}$

$\Longrightarrow \mathbb{P}_X(\text{intervallo})$

$$[a, b] = [a, +\infty) \setminus (b, +\infty)$$

VARIABILI ALEATORIE COSTANTI

$a \in \mathbb{R}$ fissato, $X(\omega) = a$, $\forall \omega \in \Omega$.



$$\delta_a(B) = \begin{cases} 1, & \text{se } a \in B \\ 0, & \text{se } a \notin B \end{cases}$$

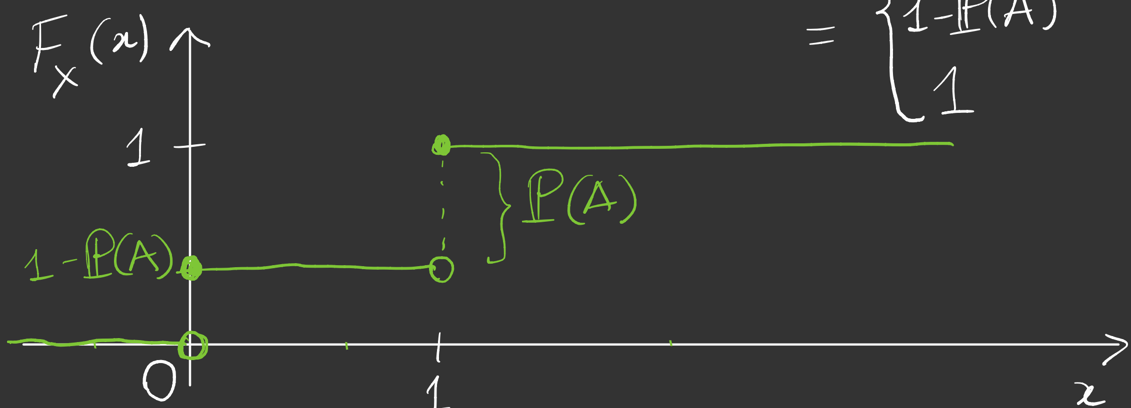
$$F_X(x) = \delta_a((-\infty, x]) = \begin{cases} 0 & \text{se } x < a \\ 1 & \text{se } x \geq a \end{cases}$$

VARIABILI ALEATORIE INDICATRICI

$A \subset \Omega$, $\quad X = 1_A$, $\quad X(\omega) = \begin{cases} 1, & \text{se } \omega \in A \\ 0, & \text{se } \omega \notin A \end{cases}$

$$\mathbb{P}_X = (1-\mathbb{P}(A))\,\delta_0 + \mathbb{P}(A)\,\delta_1$$

$$F_X(x) = \mathbb{P}_X((-\infty, x]) = (1-\mathbb{P}(A))\,\delta_0((-\infty,x]) + \mathbb{P}(A)\,\delta_1((-\infty,x]) = \begin{cases} 0 & \text{se } x<0 \\ 1-\mathbb{P}(A) & \text{se } 0 \le x < 1 \\ 1 & \text{se } x \geq 1 \end{cases}$$



Teorema

Sia $X : \Omega \to \mathbb{R}$ una v.a. Allora F_X verifica:

1) F_X è monotona crescente (non necessariamente strettamente)

2) F_X è continua a destra:

$$\lim_{y \to x^+} F_X(y) = F_X(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

3) $$\lim_{x \to -\infty} F_X(x) = 0$$

4) $$\lim_{x \to +\infty} F_X(x) = 1$$

Viceversa, se una funzione $G : \mathbb{R} \to [0,1]$ verifica 1)-2)-3)-4), allora $\exists\, X : \Omega \to \mathbb{R}$ t.c. $G \equiv F_X$

$G(x) = F_X(x), \forall x$

Lemma

Sia $(\Omega, \mathbb{P})$ spazio di probabilità. Allora $\mathbb{P}$ verifica le seguenti proprietà di stabilità per limiti monotoni:

a) siano $(A_n)_n$ una successione di eventi, con $A_n \subset A_{n+1}$, e $A = \bigcup_n A_n$. In tal caso si scrive

$$A_n \uparrow A.$$

Allora

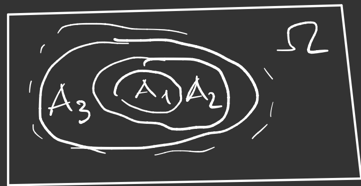
$$\lim_{n \to +\infty} \mathbb{P}(A_n) = \mathbb{P}(A).$$

b) $A_n \downarrow A$, cioè $(A_n)_n$ succ. di eventi, con $A_n \supset A_{n+1}$, e $A = \bigcap_n A_n$. Allora

$$\lim_{n \to +\infty} \mathbb{P}(A_n) = \mathbb{P}(A).$$

DIMOSTRAZIONE (del Lemma)

a)



$$A_n \uparrow A$$

$$\lim_n \mathbb{P}(A_n) = \mathbb{P}(A)$$

$(A_n)_n \Longrightarrow (B_n)_n$ di eventi disgiunti, ma $\bigcup_n B_n = A$.

$B_1 := A_1$, $B_2 := A_2 \setminus A_1$, $\dots$, $B_{n+1} = A_{n+1} \setminus A_n$.

$$A_n = B_1 \uplus B_2 \uplus B_3 \uplus \dots \uplus B_n.$$

σ-additività:

$$\mathbb{P}(A) = \sum_{i=1}^{+\infty} \mathbb{P}(B_i) = \lim_{n \to +\infty} \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(B_i) = \lim_{n \to +\infty} \mathbb{P}(A_n).$$

$$\sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(B_i) = \mathbb{P}(A_n)$$

$$\sum_{i=1}^{+\infty} a_i = \lim_{n \to \infty} \sum_{i}^{n} a_i$$

b) De Morgan

$(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$

$$\underbrace{\sum_{i=1}^{+\infty} a_i}_{S} := \lim_{n \to +\infty} \underbrace{\sum_{i=1}^{n} a_i}_{S_n}$$ purché il limite esista

$$\sum_{i=1}^{+\infty} (-1)^i = (-1)^1 + (-1)^2 + (-1)^3 + \dots =$$
$$= -1 + 1 - 1 + 1 - 1$$

$S_1 = -1$, $S_2 = 0$, $S_3 = -1$, $S_4 = 0$

Se $a_i \geq 0$, serie a termini positivi: $(S_n)_n$ è monotona crescente, il limite esiste sempre.

$$S \in [0, +\infty]$$

SERIE ASSOLUTAMENTE CONVERGENTE:

$$\sum_{i=1}^{+\infty} |a_i| < +\infty$$

Serie a termini positivi: $S = \sum_{i=1}^{+\infty} a_i \in [0, +\infty]$

$a_i \geq 0$

$$\sum_{i=1}^{+\infty} (-1)^i$$ NON è ass. conv.

$$\sum_{i=1}^{+\infty} |(-1)^i| = \sum_{i=1}^{+\infty} 1 = +\infty \qquad S_n = n$$

SERIE GEOMETRICHE

$$\sum_{i=1}^{+\infty} a_i = \sum_{i=1}^{+\infty} q^i , \quad q \in \mathbb{R} , \; -1 < q < 1$$

Se $-1 < q < 1$ allora

$$\sum_{i=1}^{+\infty} q^i = \lim_{n \to +\infty} \sum_{i=1}^{n} q^i = \lim_{n \to +\infty} \left(\frac{1-q^{n+1}}{1-q} - 1 \right) = \frac{1}{1-q} - 1$$

$$= \frac{q}{1-q}$$

$$\sum_{i=1}^{n} q^i = \frac{1-q^{n+1}}{1-q} - 1$$

DIMOSTRAZIONE (del Teorema)

1) Monotonia: $x \le y \implies F_X(x) \le F_X(y)$.

$$x \le y \Rightarrow (-\infty, x] \subset (-\infty, y] \implies \underbrace{\mathbb{P}_X((-\infty, x])}_{F_X(x)} \le \underbrace{\mathbb{P}_X((-\infty, y])}_{F_X(y)}$$

monotonia della probabilità

4) $\lim\limits_{x \to +\infty} F_X(x) = 1$.

$A_n = (-\infty, n]$, $\quad A_n \subset A_{n+1}$, $\quad A = \bigcup_n A_n = \mathbb{R}$

$A_n \uparrow \mathbb{R}$.

$$F_X(n) = \mathbb{P}_X(A_n) \xrightarrow{n \to +\infty} \mathbb{P}_X(\mathbb{R}) = 1.$$

$\lim\limits_{x \to +\infty} F_X(x)$ esiste perché F_X monotona ed è $= 1$ dato che $\lim\limits_n F_X(n) = 1$.