VARIABILI ALEATORIE
INTRODUZIONE GENERALE

EVENTO : PROPOSIZIONE | SOTTOINSIEME DI Ω

$A, B, C, \dots$

Definizione

Una variabile aleatoria o v.a. o numero aleatorio (random variable) è un'affermazione riguardante l'esito dell'esperimento aleatorio. Tale affermazione identifica uno e un solo numero reale una volta noto l'esito dell'esp. al.

ESEMPIO

Lancio due dadi

X = "somma dei risultati"

Quanto vale X?

A un evento: A è vero oppure no?

$X, Y, Z, \ldots$

$x \in \mathbb{R}$

Definizione

Ogni variabile aleatoria (intesa come affermazione) è rappresentata dalla funzione

$$X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$$

il cui valore numerico, in corrispondenza di un qualunque esito dell'esp. aleatorio, coincide con quanto fornito dall'affermazione.

Qualunque funzione $X : \Omega \to \mathbb{R}$ la chiameremo variabile aleatoria.

ESEMPIO

Lancio due dadi.

$X =$ "somma dei due risultati"

$Y =$ "prodotto ______"

$Z =$ "risultato del lancio del primo dado"

$$\Omega = DR_{6,2} = \{(1,1), (1,2), (1,3), \dots, (6,6)\}$$

$\mathbb{P}$ uniforme

$$X(\omega_1, \omega_2) = \omega_1 + \omega_2, \quad \forall (\omega_1, \omega_2) \in \Omega.$$

$$Y(\omega_1, \omega_2) = \omega_1 \omega_2$$

$$Z(\omega_1, \omega_2) = \omega_1$$

VARIABILI ALEATORIE COSTANTI

$$X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R} \qquad a \in \mathbb{R} \text{ fissato}$$

$$\omega \longmapsto a$$

$$X(\omega) = a, \quad \forall \omega \in \Omega.$$

V.A. COSTANTI Q.C.

$\{\omega \in \Omega : X(\omega) = a\}$ ha probabilità 1:

$$\boxed{\mathbb{P}(X = a) = 1}$$

Lancio: $\Omega = \mathbb{R}$, $\quad \mathbb{P}(\{1\}) = \mathbb{P}(\{2\}) = \dots = \mathbb{P}(\{6\}) = \frac{1}{6}$

$\mathbb{P}(\{x\}) = 0$, se $x \neq 1, 2, 3, 4, 5, 6$.

$$X(\omega) = \begin{cases} a, & \text{se } \omega = 1, 2, 3, 4, 5, 6, \\ \omega & \text{se } \omega \neq 1, 2, 3, 4, 5, 6. \end{cases}$$

$a \in \mathbb{R}$ fissato $\quad \mathbb{P}(X = a) = 1$

$\{\omega \in \Omega : X(\omega) = a\} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ evento q.c.

VARIABILI ALEATORIE INDICATRICI (o di BERNOULLI)

A evento "successo"

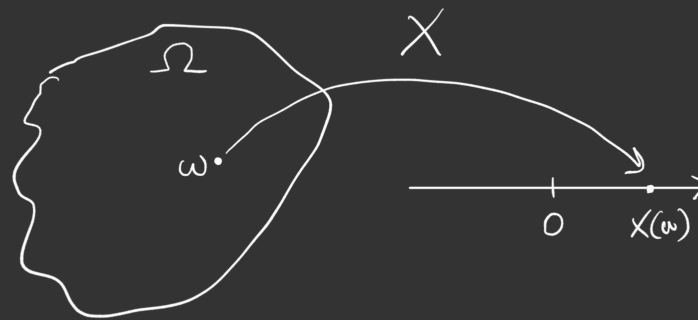
$X =$ "vale 1 se A si verifica, 0 altrimenti"

$$X(\omega) = \mathbb{1}_A(\omega) = \begin{cases} 1, & \text{se } \omega \in A, \\ 0, & \text{se } \omega \notin A, \iff \omega \in A^c \end{cases}$$

OSS. Una funzione $X: \Omega \to \mathbb{R}$ è una v.a. se Ω è discreto oppure se <u>X v.a. discreta</u>.

$\mathcal{F}$ famiglia di sottoinsiemi di Ω è una σ-algebra:

1) $\Omega \in \mathcal{F}$
2) $A \in \mathcal{F} \Rightarrow A^c \in \mathcal{F}$
3) $(A_n)_n \in \mathcal{F} \Rightarrow \bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n \in \mathcal{F}$



$(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$.

σ-algebra di Borel: $\mathcal{B}(\mathbb{R})$, è la più piccola σ-algebra che contiene gli intervalli: $[a, b]$, $[a, +\infty)$, ...

X v.a. non discreta : X è una v.a. se

$$\underbrace{\{\omega \in \Omega : X(\omega) \in B\}}_{X^{-1}(B) \in \mathcal{F}} \in \mathcal{F}, \quad \forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}).$$

É sufficiente verificare che

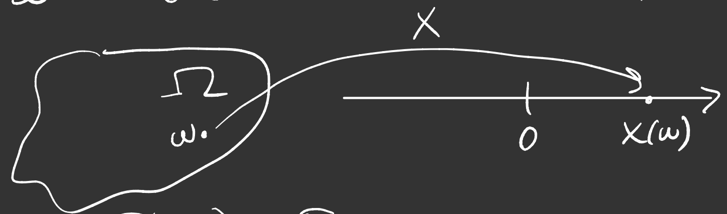
$$X^{-1}(B) \in \mathcal{F}, \qquad \forall B \text{ intervallo di } \mathbb{R}$$

$\mathcal{C}$ = famiglia di sottoinsiemi di $\mathbb{R}$

$\sigma(\mathcal{C})$ = la più piccola σ-algebra che contiene $\mathcal{C}$

EVENTI ASSOCIATI AD UNA VARIABILE ALEATORIA

Sono tutti e soli gli eventi di cui è possibile dire con certezza se sono veri oppure no una volta noto il valore della v.a. X.



$\mathcal{P}(\Omega)$, $\mathcal{F}$

ESEMPIO

Lancio due dadi. X = "somma dei due risultati"

A = "la somma è uguale a 3"

B = "la somma è ≤ 5"

C = "la somma è un numero pari"

$$A = \{\omega \in \Omega : X(\omega) = 3\} = \{\omega \in \Omega : X(\omega) \in \{3\}\}$$

$$B = \{\omega \in \Omega : X(\omega) \leq 5\} = \{\omega \in \Omega : X(\omega) \in (-\infty, 5]\}$$

$$C = \{\omega \in \Omega : X(\omega) \in 2\mathbb{Z}\}$$

Definizione

$X: \Omega \to \mathbb{R}$ v.a.

Si dice che $E \subset \Omega$ è un evento associato ad (o generato da) X se esiste un (boreliano) $B \subset \mathbb{R}$ tale che

$$E = \{\omega \in \Omega : X(\omega) \in B\} = (X \in B)$$

La famiglia degli eventi associati ad X si

NOTAZIONE

indica

$$\sigma(X) \subset \mathcal{P}(\Omega).$$

$$\Omega = (X \in \mathbb{R}) = \{\omega \in \Omega : X(\omega) \in \mathbb{R}\}$$

$$\emptyset = (X \in \emptyset) = \{\omega \in \Omega : X(\omega) \in \emptyset\}$$

$$(X \in \{x\}) = (X = x)$$

$$(X \in (x, y)) = (x < X < y)$$

$$(X \in (x, +\infty)) = (X > x)$$

$$(X \in (1,3) \cup (4,7)) = (1 < X < 3) \cup (4 < X < 7)$$

ESEMPIO

1) X v.a. costante : $X(\omega) = a$, $\forall \omega \in \Omega$, con $a \in \mathbb{R}$ fissato
2) $X = 1_A$, A evento. (X v.a. indicatrice dell'evento A)

1) $\sigma(X) = \{\emptyset, \Omega\}$

$B \subset \mathbb{R}$: $(X \in B) = \{\omega \in \Omega : X(\omega) \in B\} = \begin{cases} \Omega, & a \in B \\ \emptyset, & a \notin B \end{cases}$

2) $\sigma(X) = \{\emptyset, A, A^c, \Omega\}$

$B \subset \mathbb{R}$: $(X \in B) = \{\omega \in \Omega : X(\omega) \in B\} = \begin{cases} \Omega & 1 \in B, 0 \in B \\ A & 1 \in B, 0 \notin B \\ A^c & 1 \notin B, 0 \in B \\ \emptyset & 1 \notin B, 0 \notin B \end{cases}$

$(X \in [1, +\infty)) = (X \geq 1)$

$(X \in \{1\}) = (X = 1) = A$