TRE ESPERIMENTI ALEATORI DI RIFERIMENTO

Un'urna che contiene $\underline{n}$ palline, etichettate $e_1, \dots, e_n$
Si estraggono $\underline{K}$ palline.

1) Estr. <u>con</u> reimmissione : $K \in \mathbb{N}$

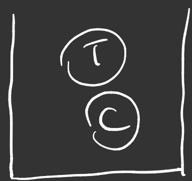
2) Estr. <u>senza</u> reimmissione ; $K \leq n$

3) Estr. simultanea ; $K \leq n$

Ordine \ Ripetizione	Senza ripetizione	Con ripetizione
Si tiene conto dell'ordine	$\Omega = D_{n,k}$ $\lvert\Omega\rvert = \dfrac{n!}{(n-k)!}$	$\Omega = DR_{n,k}$ $\lvert\Omega\rvert = n^k$
Non si tiene conto dell'ordine	$\Omega = C_{n,k}$ $\lvert\Omega\rvert = \binom{n}{k}$	——— $CR_{n,k}$

COMBINAZIONI CON RIPETIZIONE

Si lancia 3 volte una moneta. Qual è la probabilità che esca due volte testa?



3 estr. con reimm.

$$\Omega = DR_{2,3} = \{(x_1, x_2, x_3) : x_i = T, C\}$$

$$|\Omega| = 2^3 = 8, \quad \mathbb{P} \text{ UNIFORME}$$

$$DR_{2,3} = \{(T,T,T), (T,C,C), (T,C,T), (C,T,T), (C,C,T), (C,T,C), (T,T,C), (C,C,C)\}$$

$$CR_{2,3} = \{\underset{\downarrow \; \frac{1}{8}}{[T,T,T]}, \underset{\downarrow \; \frac{3}{8}}{[T,C,C]}, \underset{\downarrow \; \frac{3}{8}}{[T,T,C]}, \underset{\downarrow \; \frac{1}{8}}{[C,C,C]}\}$$

$$\mathbb{P} = ?$$

ESEMPIO (PROBABILITÀ BINOMIALE)

Un'urna che contiene b palline bianche e r palline rosse.
Si eseguono n estrazioni con reimmissione.
Qual è la probabilità dell'evento

$$A_k = \text{"si estraggono } k \text{ bianche e } n-k \text{ rosse"}.$$

$0 \leq k \leq n.$

$\Omega = DR_{b+r,n}$ $\quad |\Omega| = (b+r)^n$ $\quad E = \{B_1, \dots, B_b, R_1, \dots, R_r\}$

A_k :

1) Scelgo le K palline bianche estratte e il loro ordine : $n_1 = |DR_{b,k}|$

2) ——— $n-k$ ——— rosse ——— e il loro ordine : $n_2 = |DR_{r,n-k}|$

3) Scelgo come ordinarle tra loro : $n_3 = \binom{n}{k}$

$$(\underbrace{B_1, \dots, B_1}_{k \text{ palline bianche}}, \underbrace{R_2, R_2, \dots, R_2}_{n-k \text{ palline rosse}})$$

$C_{4,2}$:

$\{1,2\}, \{1,3\}, \{1,4\},$
$\{2,3\}, \{2,4\}, \{3,4\}.$

$$\{1,2,3,4\} \longrightarrow \binom{n}{k} = \binom{4}{2} = \frac{4!}{2!\,2!} = 6$$

$n=4$ e $K=2$

$$|A_k| = \binom{n}{k} |DR_{b,k}| \cdot |DR_{2,n-k}| =$$

$$= \binom{n}{k} b^k \, 2^{n-k}$$

$$\mathbb{P}(A_k) = \frac{|A_k|}{|\Omega|} = \binom{n}{k} \frac{b^k \, 2^{n-k}}{(b+2)^n} =$$

$$= \binom{n}{k} \frac{b^k}{(b+2)^k} \frac{2^{n-k}}{(b+2)^{n-k}} = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

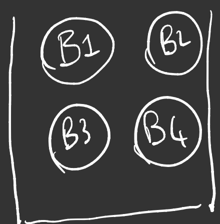
$p = \frac{b}{b+2} =$ prob. successo

$$\frac{2}{b+2} = 1 - \frac{b}{b+2}$$

$= p$

ESERCIZIO 3 (SCHEDA 3)

Tre amici si danno appuntamento nel bar della piazza centrale della città senza sapere che ci sono 4 bar. Qual è la probabilità che scelgano lo stesso bar? Tre bar differenti?



3 estr. con reimm.

$$\Omega = DR_{4,3} = \{(x_1, x_2, x_3) : x_i \in E\} = E^3$$

$$E = \{B1, B2, B3, B4\}$$

$A =$ "stesso bar" $= \{(B1, B1, B1), (B2, B2, B2), (B3, B3, B3), (B4, B4, B4)\}$

$B =$ "tre bar differenti" $=$

$$\mathbb{P}(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{4}{4^3} = \frac{1}{16}$$

$$B = D_{4,3} \implies \mathbb{P}(B) = \frac{|D_{4,3}|}{|DR_{4,3}|} = \frac{4 \cdot 3 \cdot 2}{4^3} = \frac{6}{16}$$

ESERCIZIO 4

4 estrazioni — con reimm. / senza

3 rosse
7 bianche

$A =$ "2 rosse e 2 bianche"

Con

senza

$E = \{R1, R2, R3, B1, B2, B3, B4, B5, B6, B7\}$

1° MODO

$\Omega = D_{10,4} = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) : x_i \in E,\ x_i \neq x_j \text{ se } i \neq j\}$

$|\Omega| = 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7$

1) Scelgo le 2 bianche e il loro ordine: $n_1 = |D_{7,2}| = 7 \cdot 6 = 42$ $\quad n_1 = |DR_{7,2}| = 7 \cdot 7 = 49$

2) ______ rosse ______: $n_2 = |D_{3,2}| = 3 \cdot 2 = 6$ $\quad n_2 = |DR_{3,2}| = 3 \cdot 3 = 9$

3) Scelgo come ordinarle tra loro: $n_3 = \binom{4}{2} = 6$

$$\mathbb{P}(A) = \frac{\binom{4}{2} 7 \cdot 6 \cdot 3 \cdot 2}{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7}$$

$$\mathbb{P}(A) = \frac{\binom{4}{2} 7^2 \cdot 3^2}{10^4}$$

senza

2° MODO

$$\Omega = C_{10,4} = \left\{ \{x_1, x_2, x_3, x_4\} : x_i \in E \ (x_i \neq x_j) \right\}$$

$$|\Omega| = \binom{10}{4} = \frac{10!}{4!\,6!} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7}{4!}$$

A = " 2 rosse e 2 bianche "

1) Scelgo le 2 bianche: $n_1 = |C_{7,2}| = \binom{7}{2} = \frac{7!}{2!\,5!} = \frac{7 \cdot 6}{2!}$

2) Scelgo le 2 rosse: $n_2 = |C_{3,2}| = \binom{3}{2} = \frac{3 \cdot 2}{2!}$

$$\mathbb{P}(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{\frac{7 \cdot 6}{2!} \cdot \frac{3 \cdot 2}{2!}}{\frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7}{4!}} = \underbrace{\binom{4}{2}}_{\frac{4!}{2!\,2!}} \frac{7 \cdot 6 \cdot 3 \cdot 2}{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7}$$

ESERCIZIO 6

Giocate 6 numeri al Superenalotto: 14, 7, 12, 80, 71, 90
senza reimm.

Si estraggono 7 numeri, il 7° è il jolly.

Qual è la probabilità di fare 5 + 1
(indovinare 5 dei primi 6 numeri estratti
e in più il jolly).

$$\Omega = D_{90,7} = \{(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7) : x_i = 1, \dots, 90, \ x_i \neq x_j\}$$

$$|\Omega| = 90 \cdot 89 \cdot 88 \cdot 87 \cdot 86 \cdot 85 \cdot 84$$

$$A = \text{"fare } 5+1\text{"} = \{(14, 7, 12, 80, 71, *, 90), (90, *, 7, 80, 71, 14, 12), \dots\}$$

1) Scelgo in che ordine escono i numeri giocati: $n_1 = 6!$
2) Scelgo l'estrazione del numero non indovinato: $n_2 = 6 = \binom{6}{1}$
3) Scelgo il valore ______ : $n_3 = 84$

$$\mathbb{P}(A) = \frac{6 \cdot 6! \cdot \cancel{84}}{90 \cdot 89 \cdot 88 \cdot 87 \cdot 86 \cdot 85 \cdot \cancel{84}} = \frac{6}{\binom{90}{6}} = 6\,\mathbb{P}(\text{"fare 6"})$$

ESERCIZIO 10 (PARADOSSO DEI COMPLEANNI)

Gruppo di n persone (nate in un anno non bisestile)

Qual è la probabilità p_n che almeno due persone compiano gli anni lo stesso giorno?

$$p_n > \frac{1}{2} \iff n \geq 23.$$

n estrazioni con reimm.
urna contiene 365 palline.

$$1 - x \leq e^{-x}$$

$\Omega = DR_{365,n}$ $\qquad |\Omega| = 365^n$.

$A =$ "almeno due nati lo stesso giorno" $=$

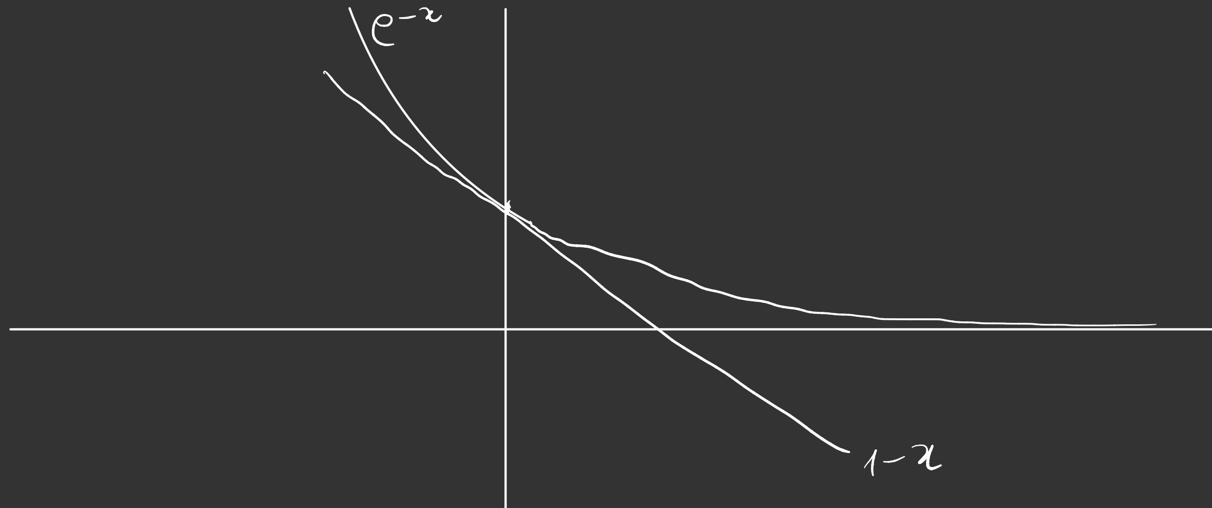
$= \{$disposizioni con almeno una ripetizione$\}$

$A^c =$ " tutti nati in giorni diversi" $= D_{365,n}$

$$p_n = \mathbb{P}(A) = 1 - \mathbb{P}(A^c) = 1 - \frac{|A^c|}{|\Omega|} = 1 - \frac{365 \cdot 364 \cdots (365-n+1)}{365^n} =$$

$$= 1 - \frac{365}{365} \cdot \frac{364}{365} \cdots \frac{365-n+1}{365} = 1 - \prod_{i=0}^{n-1} \frac{365-i}{365}$$

$$= 1 - \prod_{i=0}^{n-1} \left(1 - \frac{i}{365}\right) \geq 1 - \prod_{i=0}^{n-1} e^{-\frac{i}{365}}$$



$$= 1 - \exp\left(-\sum_{i=0}^{n-1} \frac{i}{365}\right) = 1 - \exp\left(-\frac{(n-1)n}{2 \cdot 365}\right).$$

$$\sum_{i=0}^{N} i = \frac{N(N+1)}{2}$$