DISPOSIZIONI e COMBINAZIONI

$$E = \{e_1, \dots, e_n\}$$

$e_1, \dots, e_n$ — carte di un mazzo
— palline in un'urna $\left(\begin{array}{ll} 3 \text{ rosse} & R1, R2, R3 \\ 4 \text{ bianche} & B1, B2, B3, B4 \end{array}\right.$

DISPOSIZIONE CON RIPETIZIONE

(SEQUENZE ORDINATE DI K ELEMENTI DI E, NON NECESSARIAMENTE DISTINTI)

Siano E un insieme con $|E| = n$ e $K \in \mathbb{N}$.

Indichiamo con $DR_{n,k}$ l'insieme delle disposizioni con ripetizione di K elementi di E:

$$DR_{n,k} = \underbrace{E \times \dots \times E}_{k \text{ volte}} = E^K = \{(x_1, \dots, x_k) : x_i \in E\}.$$

La cardinalità di $DR_{n,k}$ è n^K.

ESEMPIO

$E = \{a, b, c\}$ e $K = 2$. $|DR_{3,2}| = 3^2 = 9$

$$DR_{3,2} = \{(a,a), (a,b), (a,c), (b,b), (b,a), (b,c), (c,c), (c,a), (c,b)\}$$

ESEMPIO

Urna con n palline, $e_1, \ldots, e_n$.
Si estraggono k palline con reimmissione.

$\Omega = DR_{n,k}$ $\qquad$ $\mathbb{P}$ uniforme: $\mathbb{P}(\{(x_1, \ldots, x_k)\}) = \frac{1}{n^k}$.

ESEMPIO

Si lancia 10 volte un dado a sei facce.

$E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

$\Omega = DR_{6,10}$

DISPOSIZIONI SEMPLICI (senza ripetizione)

Definizione

Siano E un insieme con $|E| = n$ e $K \leq n$.
Indichiamo con $D_{n,k}$ l'insieme delle disposizioni semplici di K elementi di E:

$$D_{n,k} = \{(x_1, \dots, x_k) : x_i \in E, \ x_i \neq x_j \text{ se } i \neq j\} \subset DR_{n,k}$$

La cardinalità di $D_{n,k}$ è

$$|D_{n,k}| = n \cdot (n-1) \cdots (n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}$$

SEQUENZE ORDINATE DI K ELEMENTI DISTINTI DI E.

ESEMPIO

$E = \{a, b, c\}$ e $K = 2$. $|D_{3,2}| = 3 \cdot 2 = 6$

$$D_{3,2} = \{(a,b), (a,c), (b,a), (b,c), (c,a), (c,b)\}.$$

ESEMPIO

Urna con n palline, $e_1, \dots, e_n$.

Si estraggono <u>senza</u> reimmissione K palline.

$\Omega = D_{n,k}$ e $\mathbb{P}$ uniforme $\mathbb{P}(\{(x_1, \dots, x_k)\}) = \frac{(n-k)!}{n!}$

ESEMPIO

Giochiamo un'unica cinquina, ad es. $(13, 5, 45, 21, 34)$.

1) Qual è la probabilità di fare una cinquina SECCA.

2) ——— SEMPLICE.

$$\Omega = D_{90,5} = \{(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) : x_i = 1, \dots, 90, \ x_i \neq x_j \text{ se } i \neq j\}$$

1) $A =$ "cinquina secca" $= \{(13, 5, 45, 21, 34)\}$

$$\mathbb{P}(A) = \frac{1}{90 \cdot 89 \cdot 88 \cdot 87 \cdot 86}.$$

2) $B =$ "cinquina semplice" $\Longrightarrow |B| = 5!$

$$\mathbb{P}(B) = 5! \cdot \frac{85!}{90!} = \frac{1}{\binom{90}{5}}$$

Definizione

Indichiamo con P_n l'insieme delle permutazioni degli n elementi di E.

$$P_n = D_{n,n} \qquad (k = n)$$

COMBINAZIONI (semplici o senza ripetizioni)

Definizione

Siano E un insieme con $|E| = n$ e $k \leq n$.
Indichiamo con $C_{n,k}$ l'insieme delle combinazioni di k elementi di E, ossia la famiglia dei sottoinsiemi di E di cardinalità k:

$$C_{n,k} = \{ A \subset E : |A| = k \}$$

La cardinalità di $C_{n,k}$ è $|C_{n,k}| = \binom{n}{k}$.

DIM. Met. Sc. Succ. per $D_{n,k}$:

1) Scelgo i k elementi di E da disporre: $n_1 = |C_{n,k}|$
2) Scelgo un ordinamento: $n_2 = |P_k| = |D_{k,k}| = k!$

$$\frac{n!}{(n-k)!} = |D_{n,k}| = |C_{n,k}| \cdot k! \implies |C_{n,k}| = \binom{n}{k}$$

OSS. $\mathcal{P}(E)$, $|\mathcal{P}(E)| = 2^n$

$$\mathcal{P}(E) = \underset{\substack{\uparrow \\ \emptyset}}{C_{n,0}} \uplus C_{n,1} \uplus C_{n,2} \uplus \dots \uplus C_{n,n-1} \uplus \underset{\substack{\uparrow \\ E}}{C_{n,n}}$$

$$|\mathcal{P}(E)| = \sum_{k=0}^{n} |C_{n,k}|$$

$$2^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}$$

Formula del binomio di Newton:

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k} \qquad (a = b = 1)$$

FORMULA DEL BINOMIO DI NEWTON

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}, \qquad a,b \in \mathbb{R}.$$

monomio $a^k b^{n-k}$ perché ha il coefficiente $\binom{n}{k}$:

$$(a+b)^n = \underbrace{\overset{e_1}{(a+b)} \cdots \overset{e_n}{(a+b)}}_{n \text{ volte}} \xrightarrow[\substack{\text{scelgo } k \\ \text{volte } a \\ \text{e } n-k \\ \text{volte } b}]{} a^k b^{n-k}$$

$e_{i_1} e_{i_2} \cdots e_{i_k}$

Scelgo un sottoinsieme di cardinalità k da $\{e_1, \dots, e_n\}$

FORMULA DI STIFEL

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}, \qquad 1 \le k \le n-1.$$

n° di sottoinsiemi di cardinalità k di $E=\{e_1, \dots, e_n\}$

n° di sottoinsiemi di cardinalità k in cui è presente e_1 = n° di sottoinsiemi di cardinalità $k-1$ da $\{e_2, \dots, e_n\}$

n° di sottoinsiemi di cardinalità k che non contengono e_1

ESEMPIO

Siano $E = \{a, b, c\}$ e $K = 2$. Allora $|C_{3,2}| = \binom{3}{2} = 3$

$$C_{3,2} = \{\{a,b\}, \{a,c\}, \{b,c\}\}$$

ESEMPIO

Urna con n palline, $e_1, \dots, e_n$.

Si estraggono *simultaneamente* K palline ($K \le n$).

$(\Omega, \mathbb{P})$ spazio di probabilità:

$\Omega = C_{n,K}$ e $\underline{\mathbb{P}}$ = uniforme

$$\mathbb{P}(\{\{x_1, \dots, x_n\}\}) = \frac{1}{\binom{n}{k}}.$$

ESEMPIO (Lotto)

$B =$ "cinquina semplice"

$\Omega = C_{90,5}$ $\quad (D_{90,5})$

$B = \{\{13, 5, 45, 21, 34\}\}$

$\Omega = D_{n,k}$	$\Omega = C_{n,k}$
A	A
$\mathbb{P}(A) = \dfrac{\text{casi fav. in } D_{n,k}}{\lvert D_{n,k}\rvert}$	$\mathbb{P}(A) = \dfrac{k!\,\text{casi fav. in } C_{n,k}}{k!\,\lvert C_{n,k}\rvert}$

13, 5, 45, 21, 34

$\Omega = D_{90,5}$	$\Omega = C_{90,5}$
$B = \{(13,5,45,21,34), (5,13,45,21,34), \dots\}$	$B = \{\{13,5,45,21,34\}\}$
$\lvert B\rvert = 5!$	$\lvert B\rvert = 1$
$\mathbb{P}(B) = \dfrac{5!}{90\cdot 89\cdot 88\cdot 87\cdot 86} = \dfrac{1}{\binom{90}{5}}$	$\mathbb{P}(B) = \dfrac{1}{\binom{90}{5}}$