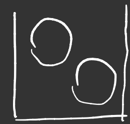
ESEMPIO 5.1



2 rosse oppure 2 bianche oppure miste

1) Qual è la probabilità che la pallina estratta sia bianca?

2) Si effettuano 3 estrazioni con reimmissione: sapendo che le prime due estratte sono bianche, qual è la probabilità che anche la terza pallina estratta sia bianca?

1) H_0 = " nell'urna ci sono 2 rosse "

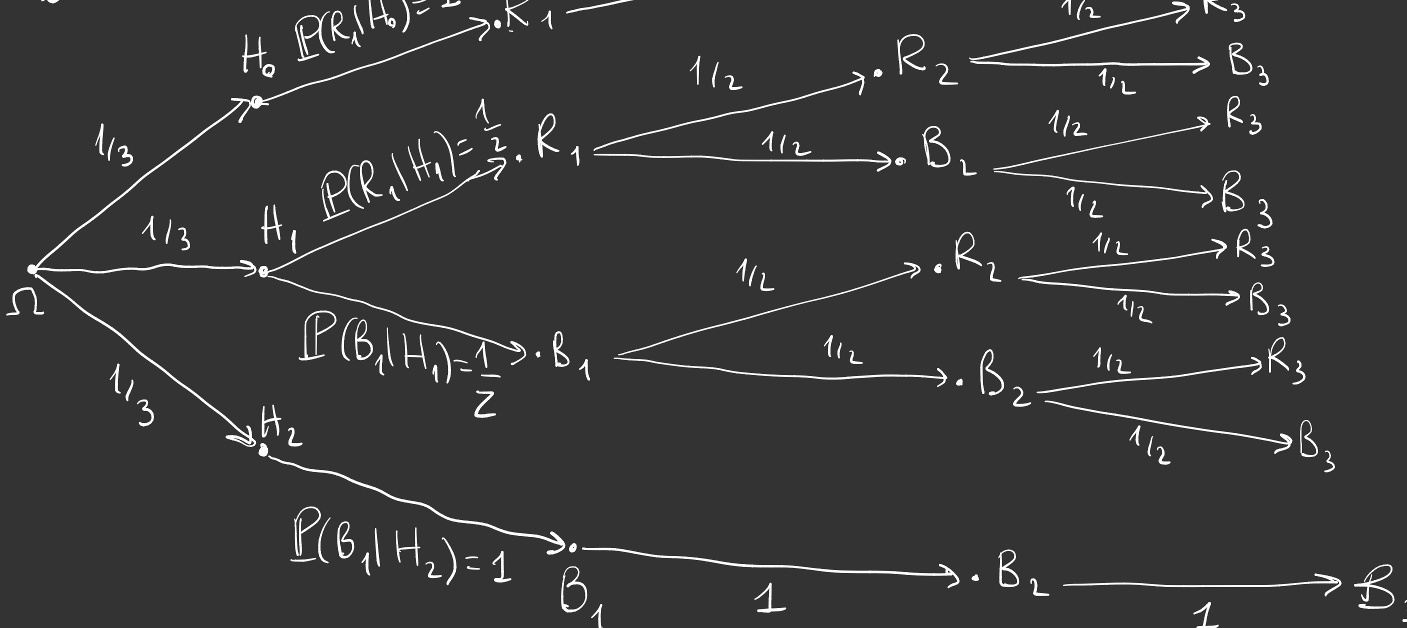
H_1 = " ——— una bianca e una rossa "

H_2 = " ——— 2 bianche "

R_i = " rossa i-esima estr. "

B_i = " bianca ——— "

$$\mathbb{P}(H_0) = \mathbb{P}(H_1) = \mathbb{P}(H_2) = \frac{1}{3}$$



$$\mathbb{P}(B_1) = \sum_{j=0}^{2} \mathbb{P}(B_1 \cap H_j) = \mathbb{P}(B_1 \cap H_1) + \mathbb{P}(B_1 \cap H_2) =$$

$$= \mathbb{P}(B_1 \mid H_1)\,\mathbb{P}(H_1) + \mathbb{P}(B_1 \mid H_2)\,\mathbb{P}(H_2) =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} + 1 \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{2}$$

$$\mathbb{P}(B_1 \cap H_0) = 0$$

2) $$\mathbb{P}(B_3 \mid B_1 \cap B_2) = \frac{\mathbb{P}(B_1 \cap B_2 \cap B_3)}{\mathbb{P}(B_1 \cap B_2)} =$$

$$= \frac{\mathbb{P}(B_1 \cap B_2 \cap B_3 \cap H_0) + \mathbb{P}(B_1 \cap B_2 \cap B_3 \cap H_1) + \mathbb{P}(B_1 \cap B_2 \cap B_3 \cap H_2)}{\mathbb{P}(B_1 \cap B_2 \cap H_0) + \mathbb{P}(B_1 \cap B_2 \cap H_1) + \mathbb{P}(B_1 \cap B_2 \cap H_2)} = *$$

$$\mathbb{P}(B_1 \cap B_2 \cap B_3 \cap H_1) = \mathbb{P}(H_1)\mathbb{P}(B_1 \mid H_1)\mathbb{P}(B_2 \mid H_1 \cap B_1)\mathbb{P}(B_3 \mid H_1 \cap B_1 \cap B_2)$$

$$* = \frac{0 + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3} \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1}{0 + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3} \cdot 1 \cdot 1} = \frac{9}{10}$$

3) Sapendo che la terza estratta è bianca, qual è la probabilità che le prime due palline estratte fossero di colore bianco?

$$\mathbb{P}(B_1 \cap B_2 \mid B_3) = \frac{\overbrace{\mathbb{P}(B_3 \mid B_1 \cap B_2)\, \mathbb{P}(B_1 \cap B_2)}^{\mathbb{P}(B_1 \cap B_2 \cap B_3)}}{\mathbb{P}(B_3)} =$$

$$= \frac{\frac{9}{10} \cdot \left(\cancel{\frac{1}{3}} \cdot \frac{1}{4} + \cancel{\frac{1}{3}}\right)}{4 \cdot \cancel{\frac{1}{3}} \cdot \frac{1}{8} + \cancel{\frac{1}{3}}} = \frac{\frac{\overset{3}{\cancel{9}}}{10} \cdot \frac{5}{\cancel{4}\,2}}{\frac{\cancel{3}}{\cancel{2}}} = \frac{15}{20}$$

4) Spazio campionario?

$$\Omega = \{0,1,2\} \times \{r, b\}^3 = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) : x_1 = 0,1,2 \quad x_i = r, b, \text{ per } i = 2,3,4\}$$

$(2, b, b, b)$ $\quad$ $(2, r, r, r)$

$(1, r, b, r) \longleftrightarrow \Omega \to H_1 \to R_1 \to B_2 \to R_3$

$(\Omega, \mathbb{P})$

$$\mathbb{P}(\{(1, r, b, r)\}) = \mathbb{P}(H_1 \cap R_1 \cap B_2 \cap R_3)$$

CALCOLO COMBINATORIO

Ω finito $\qquad \Omega = \{\omega_1, \dots, \omega_N\}$

$\mathbb{P}$ uniforme : $\qquad \mathbb{P}(\{\omega_i\}) = \frac{1}{N}$

$$\mathbb{P}(A) = \frac{|A|}{N}$$

FATTORIALE

$$n! := n(n-1)\cdots 1 \quad , \quad \forall n = 1, 2, \ldots$$

$$0! := 1$$

COEFFICIENTE BINOMIALE

$$\binom{n}{k} := \frac{n!}{k!(n-k)!} \qquad n \geq k \geq 0$$

PROPRIETÀ

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k} \quad , \quad \binom{n}{0} = \frac{\cancel{n!}}{0!\,\cancel{n!}} = 1 = \binom{n}{n}$$

$$\binom{n}{1} = \frac{n!}{1!\,(n-1)!} = \frac{n!}{(n-1)!} = n = \binom{n}{n-1}$$

FORMULA DI STIFEL

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} \qquad 1 \leq K \leq n$$

DIM.

$$\binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} = \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!} + \frac{(n-1)!}{k!(n-1-k)!} =$$

$$= \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-K-1)!}\left(\underbrace{\frac{1}{n-K} + \frac{1}{K}}_{\frac{n}{K(n-K)}}\right) = \frac{n!}{K!(n-k)!}$$

	K=0	K=1	K=2	K=3	K=4
n=0	$\binom{0}{0}=1$				
n=1	$\binom{1}{0}=1$	$\binom{1}{1}=1$			
n=2	$\binom{2}{0}=1$	$\binom{2}{1}=2$	$\binom{2}{2}=1$		
n=3	1	3	3	1	
n=4	1	4	6	4	1
	1				

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

$$(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$$

FORMULA DEL BINOMIO DI NEWTON

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$$

METODO DELLE SCELTE SUCCESSIVE

ESEMPIO

1) Quante password di 8 caratteri possono essere generate con 36 valori alfanumerici?
2) Quante se i valori devono essere distinti?

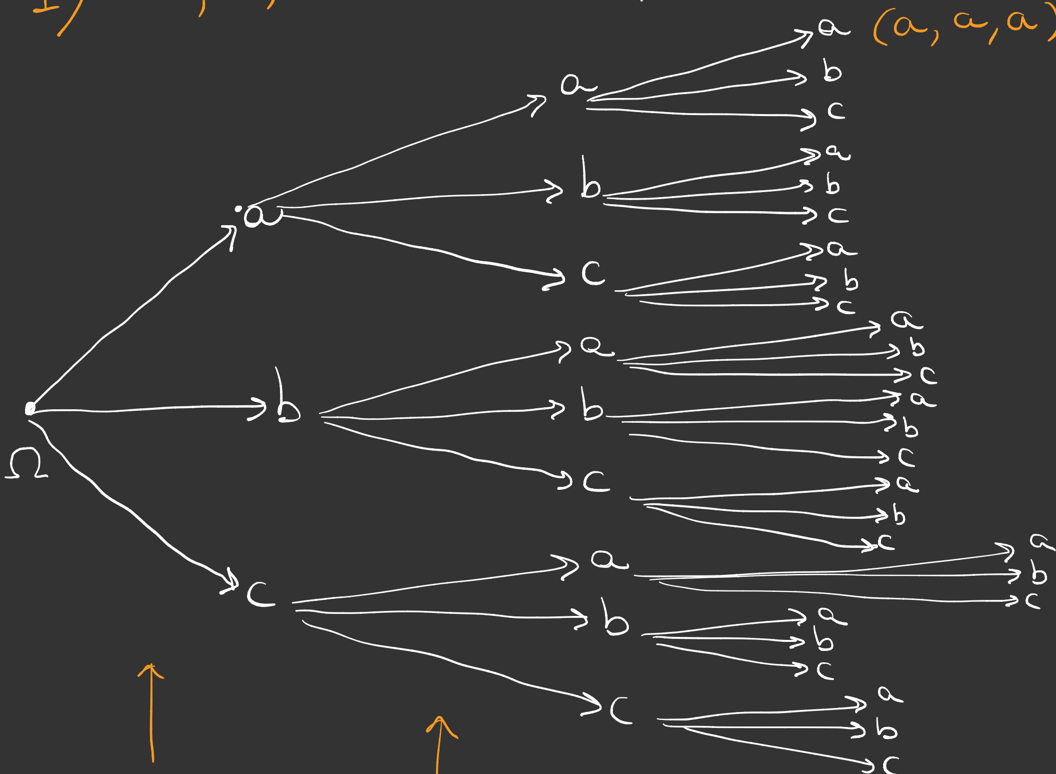
1) $36^8 = n_1 \cdot n_2 \cdots n_8$
2) $36 \cdot 35 \cdot 34 \cdot 33 \cdot 32 \cdot 31 \cdot 30 \cdot 29 = n_1 n_2 \cdots n_8$

8 SCELTE SUCCESSIVE:

		DISTINTI
1ª) Scelta del primo valore:	$n_1 = 36$	$n_1 = 36$
2ª) Secondo valore:	$n_2 = 36$	$n_2 = 35$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
8ª) Ottavo valore:	$n_8 = 36$	$n_8 = 29 = (36-8+1)$

1) a, b, c

$\Omega = \{ \text{password di tre caratteri} \} = \{(a, a, a), (a, b, a), \dots\}$



n° foglie $= |\Omega|$

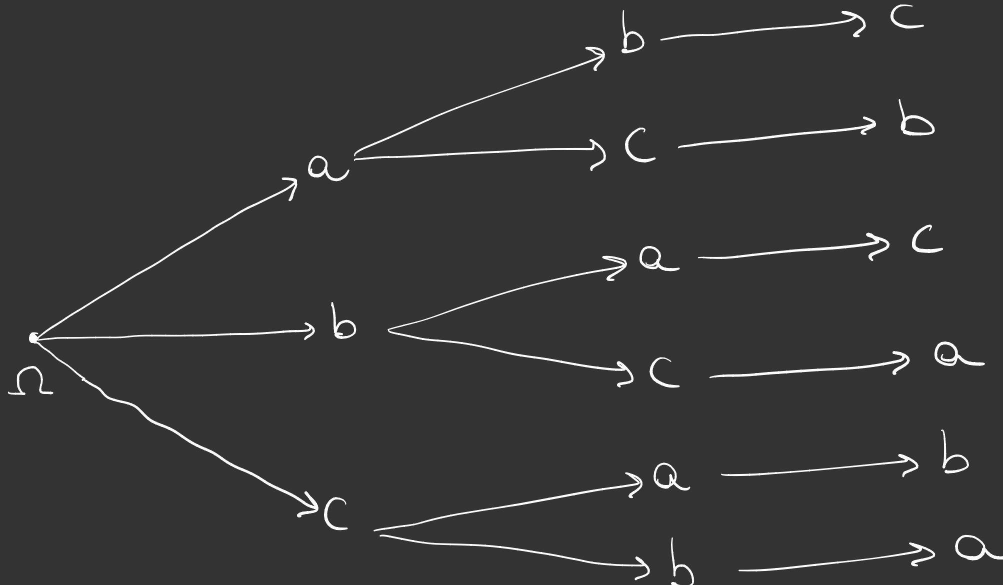
$n_1 n_2 n_3$

$n_1 = 3$

$n_2 = 3$

$n_3 = 3$

2) a, b, c $\qquad \Omega = \{\text{password di tre caratteri distinti}\}$



$$|\Omega| = n_1 n_2 n_3 = 6$$

$n_1 = 3 \qquad n_2 = 2 \qquad n_3 = 1$

Metodo delle scelte successive

Supponiamo che ciascun elemento di un insieme A possa essere descritto tramite una e una sola sequenza di k scelte successive, in cui ogni scelta viene effettuata tra un numero finito di possibilità $n_1, \dots, n_k$, che non dipendono dalle scelte precedenti. Allora

$$|A| = n_1 n_2 \cdots n_k .$$

ESEMPIO

52 carte $\rightarrow$ cuori, quadri, fiori, picche

(2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, J, Q, K, A)
TIPI

1) Quanti full?

2) Quante doppie coppie?

$\Omega = \{ \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\} :$ x_i una carta del mazzo $(x_i \neq x_j) \}$

Full = 3 carte di un tipo + 2 carte di un altro tipo

A = "full"

1) TIPO del tris : $n_1 = 13$

2) TIPO della coppia : $n_2 = 12$

3) SEMI del tris : $n_3 = 4 = \binom{4}{3} = \binom{4}{1}$

4) SEMI della coppia : $n_4 = \binom{4}{2} = \frac{4!}{2!2!} = \frac{4 \cdot 3 \cdot 2}{2 \cdot 2} = 6$

$\{c, q, p\}$

$\{c, q, f\}$

$\{c, p, f\}$

$\{q, p, f\}$

$\{c, q, p, f\}$

$$|A| = n_1 n_2 n_3 n_4 = 13 \cdot 12 \cdot 4 \cdot 6 = 3744.$$

N.B. Se Ω è t.c. $|\Omega| = n$, i sottoinsiemi di cardinalità K sono $\binom{n}{K}$

2) $B =$ "esce doppia coppia"

doppia coppia = 2 di un tipo + 2 di un altro tipo + un'altra carta di un altro tipo ancora.

8, 8, 9, 9, 3

8, 8, 9, 9, 3

9, 9, 8, 8, 3

1) SEMI della prima coppia: $n_1 = \binom{4}{2} = 6$

2) ——— seconda coppia: $n_2 = \binom{4}{2} = 6$

3) SEME della quinta carta: $n_3 = 4 = \binom{4}{1}$

4) TIPO della quinta carta: $n_4 = 13$

5) TIPO della prima coppia: $n_5 = 12$

6) ——— seconda coppia: $n_6 = 11$

5) TIPI DELLE COPPIE:

$$\frac{12 \cdot 11}{2} = \binom{12}{2}$$

$$2\,|B| = 13 \cdot 12 \cdot 11 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 4 = 247104$$