INDIPENDENZA TRA EVENTI

$A \perp\!\!\!\perp B$: $\qquad \mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)$

REGOLA DELLA CATENA

$\mathbb{P}(A) > 0$
$\mathbb{P}(B) > 0$

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(B|A)\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A|B)\mathbb{P}(B)$$

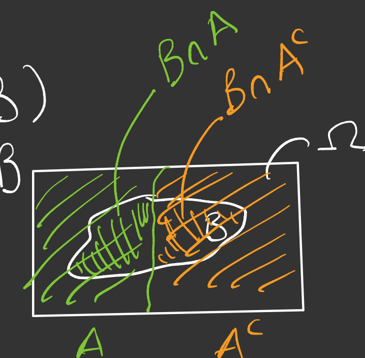
TEOREMA

$$A \perp\!\!\!\perp B \Longrightarrow A^c \perp\!\!\!\perp B, \quad A \perp\!\!\!\perp B^c, \quad A^c \perp\!\!\!\perp B^c$$

DIM. $\underline{A^c \perp\!\!\!\perp B}$, $\quad \mathbb{P}(A^c \cap B) = \mathbb{P}(A^c)\mathbb{P}(B)$

$$B = \Omega \cap B = (A \cup A^c) \cap B = (A \cap B) \cup (A^c \cap B)$$

$B \cap A$ e $B \cap A^c$ sono disgiunti e la loro unione è B



Additività: $\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(B \cap A) + \mathbb{P}(B \cap A^c) = \mathbb{P}(B)\mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B \cap A^c)$

$$\mathbb{P}(B \cap A^c) = \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(B)\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(B)(1 - \mathbb{P}(A)) = \mathbb{P}(B)\mathbb{P}(A^c)$$

Definizione

Tre eventi A, B, C si dicono **indipendenti** se

1) $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)$, 2) $\mathbb{P}(A \cap C) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(C)$, 3) $\mathbb{P}(B \cap C) = \mathbb{P}(B)\mathbb{P}(C)$

4) $\mathbb{P}(A \cap B \cap C) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)\mathbb{P}(C)$

1) + 2) + 3) : mutuamente indipendenti

In generale, $A_1, \dots, A_n$ si dicono **indipendenti** se

$$\mathbb{P}(A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_k}) = \mathbb{P}(A_{i_1}) \cdots \mathbb{P}(A_{i_k})$$

$\forall\, k = 2, \dots, n$, $i_1, \dots, i_k = 1, \dots, n$, distinti tra loro.

ESEMPIO 1

Lancio una moneta e un dado, non truccati.

Spazio di probabilità?

$$\Omega = \{t, c\} \times \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} = \{(x, y) : x \in \{t, c\}, y \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}\}$$

$$\mathbb{P}(\{(t,3)\}) = \mathbb{P}(T \cap A_3) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{indip.}}}{=} \mathbb{P}(T)\mathbb{P}(A_3) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{non} \\ \text{truccati}}}{=} \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{12}$$

$T =$ "esce testa"

$A_i =$ "esce il numero i", $i = 1, \dots, 6$

ESEMPIO 2 (GIOCO DEL LOTTO)

Si estraggono senza reimmissione cinque numeri da un'urna che contiene 90 palline numerate da 1 a 90.

Con reimmissione:

$$\Omega = \{1, \dots, 90\}^5 = \{(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) : x_i \in \{1, \dots, 90\}\}$$

$$\mathbb{P}(\{(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)\}) = \frac{1}{90^5} = \underbrace{\mathbb{P}(x_1)\mathbb{P}(x_2)\cdots\mathbb{P}(x_5)}_{\text{indipendenza}}$$

senza reimmissione

$$\Omega = \{(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) : x_i \in \{1, \dots, 90\},\ x_i \neq x_j \text{ se } i \neq j\}$$

$$\mathbb{P}(\{(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)\}) \overset{\text{Reg catene}}{=} \mathbb{P}(x_1)\mathbb{P}(x_2|x_1)\mathbb{P}(x_3|x_1,x_2)\cdots\mathbb{P}(x_5|x_1,x_2,x_3,x_4)$$

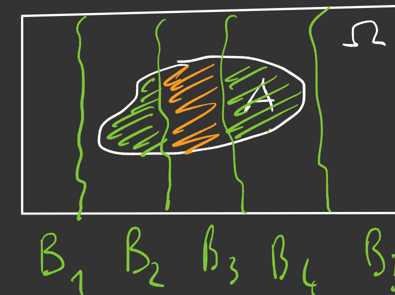
$$= \frac{1}{90} \cdot \frac{1}{89} \cdot \frac{1}{88} \cdot \frac{1}{87} \cdot \frac{1}{86}$$

UNIFORME

TEOREMA (FORMULA DELLE PROBABILITÀ TOTALI)

$B_1, \dots, B_n$ partizione di Ω. Allora per ogni evento A vale che

$$\underbrace{\mathbb{P}(A)}_{\text{prob. totale}} = \sum_{i=1}^{n} \underbrace{\mathbb{P}(A \cap B_i)}_{\text{prob. parziali}}$$



$B_1 \cap A = \emptyset$

$B_5 \cap A = \emptyset$

Se inoltre $\mathbb{P}(B_i) > 0$ allora

$$\mathbb{P}(A) = \sum_{i=1}^{n} \underbrace{\mathbb{P}(A | B_i)\, \mathbb{P}(B_i)}_{\overset{\text{Reg. catena}}{=} \mathbb{P}(A \cap B_i)}$$

Dimostrazione: $A = A \cap \Omega = A \cap (\bigcup_i B_i) = \bigcup_i (A \cap B_i)$

Additività: $\mathbb{P}(A) = \sum_i \mathbb{P}(A \cap B_i)$

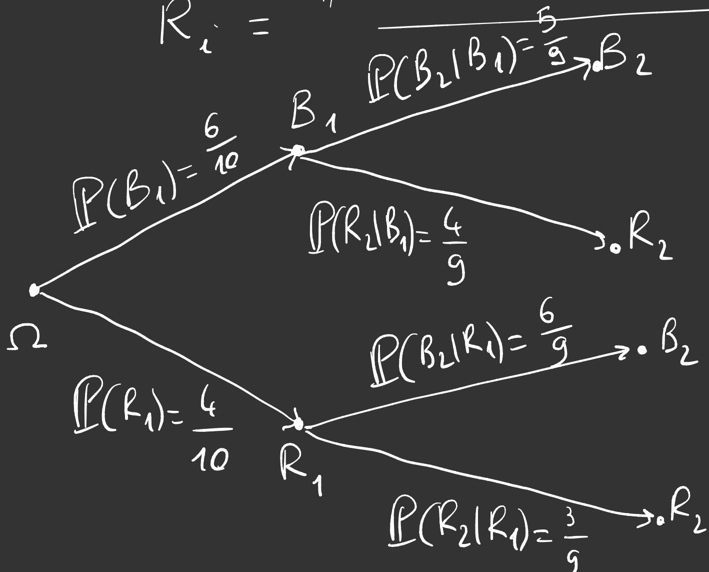
ESERCIZIO

Un'urna contiene 10 palline di cui 6 bianche e 4 rosse. Si estraggono due palline senza reimmissione. Qual è la probabilità di

$B_2 =$ "la seconda estratta è bianca"

$B_i =$ "l'i-esima estratta è bianca"

$R_i =$ " rossa " $= B_i^c$



$$\mathbb{P}(B_2) \overset{\text{form. prob. totali}}{=} \mathbb{P}(B_1 \cap B_2) + \mathbb{P}(R_1 \cap B_2)$$
$$= \mathbb{P}(B_2|B_1)\,\mathbb{P}(B_1) +$$
$$+ \mathbb{P}(B_2|R_1)\,\mathbb{P}(R_1) =$$
$$= \frac{6}{10} \cdot \frac{5}{9} + \frac{4}{10} \cdot \frac{6}{9} = \frac{3}{5}$$

TEOREMA (FORMULA DI BAYES)

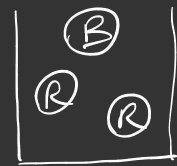
A, B con $\mathbb{P}(A) > 0$ e $\mathbb{P}(B) > 0$. Allora vale che

$$\mathbb{P}(B|A) = \frac{\mathbb{P}(A|B)\,\mathbb{P}(B)}{\mathbb{P}(A)}.$$

DIM

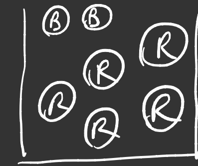
$$\mathbb{P}(B|A) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(A)} \overset{\text{Reg catena}}{=} \frac{\mathbb{P}(A|B)\,\mathbb{P}(B)}{\mathbb{P}(A)}$$

ESERCIZIO



1 bianca
2 rosse

TESTA

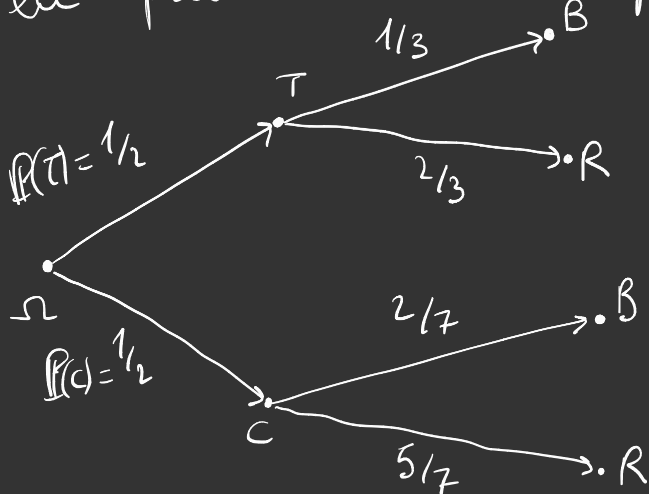


2 bianche
5 rosse

CROCE

T = "esce testa"
C = "esce croce" $= T^c$
B = "esce pallina bianca"
R = " ——— rossa" $= B^c$

Sapendo che è stata estratta una bianca, qual è la probabilità che fosse TESTA?



$$\mathbb{P}(T|B) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Bayes}}}{=} \frac{\mathbb{P}(B|T)\,\mathbb{P}(T)}{\mathbb{P}(B)} =$$

$$= \frac{\mathbb{P}(B|T)\,\mathbb{P}(T)}{\mathbb{P}(B|T)\,\mathbb{P}(T) + \mathbb{P}(B|C)\,\mathbb{P}(C)} =$$

$$= \frac{\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}}{\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2} + \frac{2}{7}\cdot\frac{1}{2}} = \frac{7}{13}$$

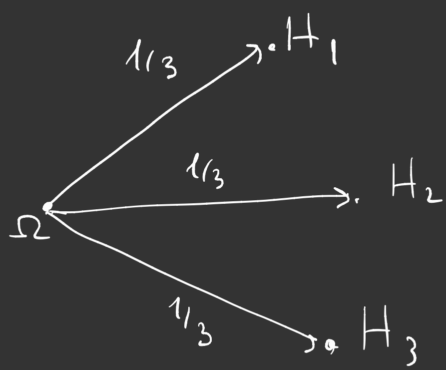
DILEMMA DI MONTY-HALL

Il giocatore sceglie la porta n° 1

H_1 = "l'auto si trova dietro la porta n° 1"

H_2 = " ——————————— 2"

H_3 = " ——————————— 3"



$A = H_1$

A = "il giocatore vince tenendo fede alla sua scelta"

B = "il giocatore sceglie la porta lasciata chiusa dal conduttore" $= H_2 \cup H_3$

$$\mathbb{P}(A) = \frac{1}{3} \quad e \quad \mathbb{P}(B) = \frac{2}{3}$$