Esercizio 9 (Scheda 1)

$(\Omega, \mathbb{P})$, $A, B \subset \Omega$ t.c. $\mathbb{P}(A) = 0.4$ e $\mathbb{P}(B) = 0.7$.

$B \subset A \cup B \implies \mathbb{P}(B) \leq \mathbb{P}(A \cup B)$

1) $\mathbb{P}(A \cup B) = 0.4$ F

$\mathbb{P}(A \cup B) \geq \max(\mathbb{P}(A), \mathbb{P}(B))$

2) $\mathbb{P}(A \cup B) = 0.7$ V o F

3) $\mathbb{P}(A \cup B) \geq 0.7$ V

4) $\mathbb{P}(A \cup B) = 1.1$ F $\implies A \cap B \neq \emptyset$

$$\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$$

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \underbrace{\mathbb{P}(A \cup B)}_{\leq 1} \geq 0.4 + 0.7 - 1 =$$

$$= 0.1$$

$$\mathbb{P}(A\cup B) \geq \max(\mathbb{P}(A), \mathbb{P}(B)) = 0.7$$

$$\mathbb{P}(A\cap B) \geq \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - 1 = 0.1 \Longrightarrow 7)$$

$$\mathbb{P}(A\cap B) \leq \min(\mathbb{P}(A), \mathbb{P}(B)) = 0.4$$

$A\cap B \subset A$

$A\cap B \subset B$

7) $\mathbb{P}(A^c\cap B) \geq 0.3$ ✓

$$\mathbb{P}(A^c) = 1 - \mathbb{P}(A) = 0.6$$

$$\mathbb{P}(A^c\cap B) \geq \mathbb{P}(A^c) + \mathbb{P}(B) - 1 = 0.6 + 0.7 - 1 = 0.3$$

PROBABILITÀ CONDIZIONATA

A e $B \subset \Omega$ $\quad \mathbb{P}(A), \mathbb{P}(B)$ a priori

$A =$ "esce il 4", $B =$ "esce un numero pari"

$C =$ "esce il 5"

Sappiamo che B si è verificato

in media res

$\mathbb{P}(A|B) =$ probabilità di A condizionata a B

$\mathbb{P}(B|B) = 1$

$\mathbb{P}(C|B) = 0$

So se A si è verificato oppure no

a posteriori

So se B si è verificato oppure no

Definizione

A e B due eventi. $\mathbb{P}(B) > 0$.

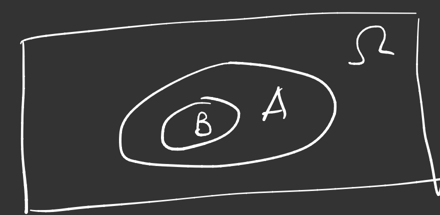
La **probabilità condizionata** (o **condizionale**) di **A dato B** è

$$\mathbb{P}(A|B) := \frac{\mathbb{P}(A\cap B)}{\mathbb{P}(B)} \propto \mathbb{P}(A\cap B)$$

proporzionale a

OSS. 1)

$$\mathbb{P}(B|B) = \frac{\mathbb{P}(B\cap B)}{\mathbb{P}(B)} = 1$$



$$\mathbb{P}(\Omega|B) = \frac{\mathbb{P}(\Omega\cap B)}{\mathbb{P}(B)} = 1$$

$$\mathbb{P}(\cdot|B) : \mathcal{P}(\Omega) \longrightarrow [0,1]$$

2) $\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A \mid \Omega)$

3) Non vale $\mathbb{P}(A \mid B) \cancel{=} \mathbb{P}(B \mid A)$ in generale.

Teorema

$B \subset \Omega$ t.c. $\mathbb{P}(B) > 0$.

I) $0 \leq \mathbb{P}(A|B) \leq 1$, $\forall A \subset \Omega$.

II) $\mathbb{P}(\Omega|B) = 1$

III) σ-additività: $\mathbb{P}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \middle| B\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_n|B)$, se $A_i \cap A_j = \emptyset$ per ogni $i \neq j$.

IV) $\mathbb{P}(\emptyset|B) = 0$

V) Additività finita: $\mathbb{P}(A_1 \cup A_2|B) = \mathbb{P}(A_1|B) + \mathbb{P}(A_2|B)$, se $A_1 \cap A_2 = \emptyset$

VI) $\mathbb{P}(A^c|B) = 1 - \mathbb{P}(A|B)$

VII) Monotonia: $A_1 \subset A_2 \Longrightarrow \mathbb{P}(A_1|B) \leq \mathbb{P}(A_2|B)$.

Dimostrazione

I) $0 \leq \mathbb{P}(A|B) \leq 1$.

$$\mathbb{P}(A|B) = \frac{\mathbb{P}(A\cap B)}{\mathbb{P}(B)} \leq 1$$

$\uparrow$ $\mathbb{P}(A\cap B) \leq \mathbb{P}(B)$

II) $\mathbb{P}(\Omega|B) = 1$ ✓

III) σ-additività: $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ con $A_i \cap A_j = \emptyset$ se $i \neq j$.

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \,\Big|\, B\right) \overset{\text{def} \downarrow}{=} \frac{\mathbb{P}\left(\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right)\cap B\right)}{\mathbb{P}(B)} =$$

$$= \frac{\mathbb{P}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} (A_n \cap B)\right)}{\mathbb{P}(B)} \overset{\uparrow}{=} \frac{\sum_n \mathbb{P}(A_n\cap B)}{\mathbb{P}(B)} = \sum_n \mathbb{P}(A_n|B)$$

$(A_i\cap B)\cap(A_j\cap B) = \emptyset$
$i\neq j$

REGOLA DELLA CATENA

$$\mathbb{P}(A|B) = \frac{\mathbb{P}(A\cap B)}{\mathbb{P}(B)} \Longrightarrow \mathbb{P}(A\cap B) = \mathbb{P}(B)\,\mathbb{P}(A|B)$$

Teorema

A, B due eventi con $\mathbb{P}(B) > 0$. Vale la regola della catena (o formula della probabilità composta)

$$\mathbb{P}(A\cap B) = \mathbb{P}(B)\,\mathbb{P}(A|B).$$

Più in generale, n eventi $A_1, \dots, A_n$ con $\mathbb{P}(A_1\cap\dots\cap A_{n-1}) > 0$ allora vale la regola della catena

$$\mathbb{P}(A_1\cap\dots\cap A_n) = \mathbb{P}(A_n|A_1\cap\dots\cap A_{n-1})\cdot\mathbb{P}(A_{n-1}|A_1\cap\dots\cap A_{n-2})\times$$
$$\times\dots\times\mathbb{P}(A_2|A_1)\cdot\mathbb{P}(A_1).$$

OSS.

$$A_1 \cap \dots \cap A_{n-1} \subset A_1 \cap \dots \cap A_{n-2} \subset \dots \subset A_1$$

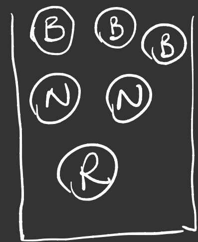
$$0 < \mathbb{P}(A_1 \cap \dots \cap A_{n-1}) \leq \mathbb{P}(A_1 \cap \dots \cap A_{n-2}) \leq \dots \leq \mathbb{P}(A_1).$$

Dimostrazione

$$\mathbb{P}(A_n | A_1 \cap \dots \cap A_{n-1}) \cdot \mathbb{P}(A_{n-1} | A_1 \cap \dots \cap A_{n-2}) \cdots \mathbb{P}(A_2 | A_1) \mathbb{P}(A_1) =$$

$$= \frac{\mathbb{P}(A_1 \cap \dots \cap A_n)}{\cancel{\mathbb{P}(A_1 \cap \dots \cap A_{n-1})}} \frac{\cancel{\mathbb{P}(A_1 \cap \dots \cap A_{n-1})}}{\cancel{\mathbb{P}(A_1 \cap \dots \cap A_{n-2})}} \cdots \frac{\cancel{\mathbb{P}(A_1 \cap A_2)}}{\cancel{\mathbb{P}(A_1)}} \cdot \cancel{\mathbb{P}(A_1)}$$

ESEMPIO



3 bianche, due nere, una rossa

3 estrazioni senza reimmissione

Qual è la prob. di estrarre B, R, N?

B_i = "esce una bianca all'i-esima estrazione"

$i = 1, 2, 3$ $\quad R_i$ = "________ rossa ________"

N_i = "________ nera ________"

$$\mathbb{P}(B_1) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}; \quad \boxed{\mathbb{P}(N_1) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}; \quad \mathbb{P}(R_1) = \frac{1}{6}}$$

$$\mathbb{P}(B_2 | B_1) = \frac{2}{5}$$

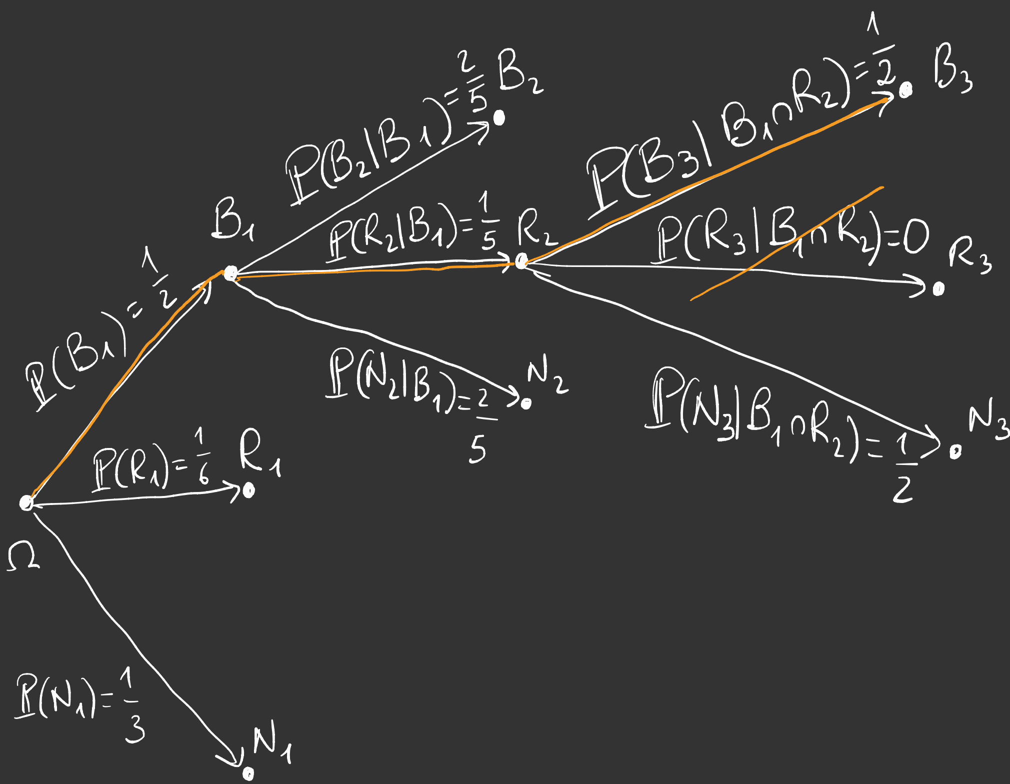
$$\mathbb{P}(B_3 | B_1 \cap R_2) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

$$A = B_1 \cap R_2 \cap N_3$$

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(N_3 | B_1 \cap R_2)\mathbb{P}(R_2 | B_1)\mathbb{P}(B_1)$$

$$= \frac{2}{4} \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{3}{6} = \frac{1}{20}$$

DIAGRAMMA AD ALBERO



$$\Omega \to B_1 \to R_2 \to B_3$$

$$\Updownarrow$$

$$B_1 \cap R_2 \cap B_3$$

$$\mathbb{P}(B_1 \cap R_2 \cap B_3) =$$

$$= \mathbb{P}(B_3 \mid B_1 \cap R_2) \times$$

$$\times\, \mathbb{P}(R_2 \mid B_1)\, \mathbb{P}(B_1) =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{2}$$

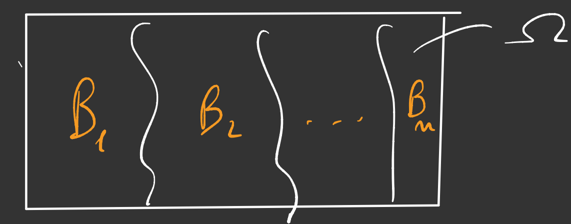
OSS. Da ogni modo si va in una partizione di Ω, B_1, R_1, N_1

Definizione

$B_1, \dots, B_n$ si chiamano partizione di Ω se:

1) $B_i \cap B_j = \emptyset$ se $i \neq j$

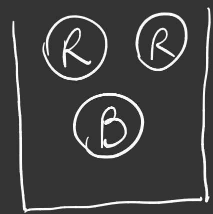
2) $\bigcup_{i=1}^{n} B_i = \Omega$



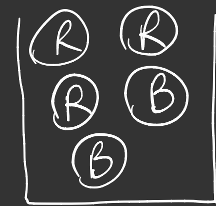
OSS. $n = 2$, B_1 e $B_2 = B_1^c$.

$\Longrightarrow$ La somma delle prob. degli archi che escono da un nodo fa 1.

ESERCIZIO



2 rosse
1 bianca
Testa



3 rosse
2 bianche
Croce

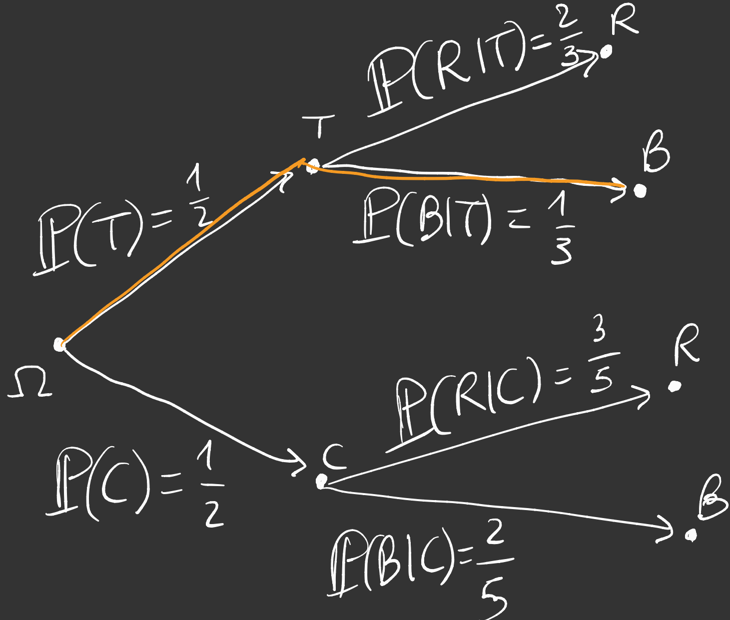
Si lancia una moneta
Qual è la prob. che esca TESTA e che la pallina sia BIANCA

T = "esce testa"

C = "esce croce" $= T^c$

R = "esce una pallina rossa"

B = "________ bianca" $= R^c$



$$A = T \cap B$$

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(T \cap B) =$$
$$= \mathbb{P}(B|T)\,\mathbb{P}(T) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$$

$$\Omega = \{t, c\} \times \{r, b\} = \{(t,r), (t,b), (c,r), (c,b)\}$$

$$A = \{(t,b)\} = T \cap B \quad \Big| \quad T = \{(t,r), (t,b)\}$$

EVENTI INDIPENDENTI

$$\mathbb{P}(A|B) = \mathbb{P}(A), \quad \mathbb{P}(B) > 0.$$

Definizione

Due eventi A e B si dicono *indipendenti* se

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B).$$

In tal caso scriviamo

$$A \perp\!\!\!\perp B.$$

Teorema

1) Se $\mathbb{P}(B)>0$ allora

$$A \perp\!\!\!\perp B \iff \mathbb{P}(A|B)=\mathbb{P}(A).$$

2) Se $\mathbb{P}(A)>0$ allora

$$A \perp\!\!\!\perp B \iff \mathbb{P}(B|A)=\mathbb{P}(B).$$

N.B. Se $\mathbb{P}(A)>0$, $\mathbb{P}(B)>0$ allora

$$\mathbb{P}(A\cap B)=\mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B) \iff \mathbb{P}(A|B)=\mathbb{P}(A) \iff \mathbb{P}(B|A)=\mathbb{P}(B).$$

Dimostrazione

1) $\Rightarrow$ $$\mathbb{P}(A|B)=\frac{\mathbb{P}(A\cap B)}{\mathbb{P}(B)} \overset{A \perp\!\!\!\perp B}{=} \frac{\mathbb{P}(A)\cancel{\mathbb{P}(B)}}{\cancel{\mathbb{P}(B)}}=\mathbb{P}(A).$$

$\Leftarrow$ $\mathbb{P}(A|B) = \mathbb{P}(A) \iff \dfrac{\mathbb{P}(A\cap B)}{\mathbb{P}(B)} = \mathbb{P}(A)$

$\iff \mathbb{P}(A\cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B).$

OSS. INDIPENDENZA $\neq$ DISGIUNZIONE

$A \perp\!\!\!\perp B$ e $A\cap B=\emptyset \iff \underbrace{\mathbb{P}(A)=0 \vee \mathbb{P}(B)=0}$

Infatti

$$0=\mathbb{P}(\emptyset) \underset{\text{Disg.}}{=} \mathbb{P}(A\cap B) \underset{\perp\!\!\!\perp}{=} \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)$$