ESERCIZIO

Dado non bilanciato a forma tetraedro regolare.
Lanciando il dado, la probabilità che esca 1 è il doppio della probabilità che esca 2, che a sua volta è il doppio della prob. che esca 3, che a sua volta " " " " " " " 4.

Se si lancia il dado, qual è la prob. che esca un numero pari?

$A =$ "esce un numero pari"

$$\Omega = \{1,2,3,4\}, \quad A = \{2,4\} \qquad \mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(\{2\}) + \mathbb{P}(\{4\})$$

$$\mathbb{P}(\{1\}) = 2\mathbb{P}(\{2\}), \quad \mathbb{P}(\{2\}) = 2\mathbb{P}(\{3\}), \quad \mathbb{P}(\{3\}) = 2\overbrace{\mathbb{P}(\{4\})}^{x} = 2x$$

$$\mathbb{P}(\Omega) = 1 \iff \mathbb{P}(\{1\}) + \mathbb{P}(\{2\}) + \mathbb{P}(\{3\}) + \mathbb{P}(\{4\}) = 1$$

$$8x + 4x + 2x + x = 1$$

$$\begin{cases} \mathbb{P}(\{1\}) = \frac{8}{15} \\ \mathbb{P}(\{2\}) = \frac{4}{15} \\ \mathbb{P}(\{3\}) = \frac{2}{15} \\ \mathbb{P}(\{4\}) = \frac{1}{15} \end{cases} \Longrightarrow \mathbb{P}(A) = \frac{5}{15} = \frac{1}{3}$$

$$\Omega = \{\omega_1, \dots, \omega_N\}, \quad p_1, \dots, p_N \in [0, 1], \quad \sum_{i=1}^{N} p_i = 1$$

$$\text{freq. relativa} = \frac{\text{freq. assoluta}}{\text{n° lanci}}$$

1500 lanci:

Valore	freq. assoluta	freq. relativa
1	800	$8/15 \approx \mathbb{P}(\{1\})$
2	400	$4/15 \approx \mathbb{P}(\{2\})$
3	200	$2/15 \approx \mathbb{P}(\{3\})$
4	100	$1/15 \approx \mathbb{P}(\{4\})$

Sub-additività

$$A, B \subset \Omega \implies \mathbb{P}(A \cup B) \leq \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B)$$

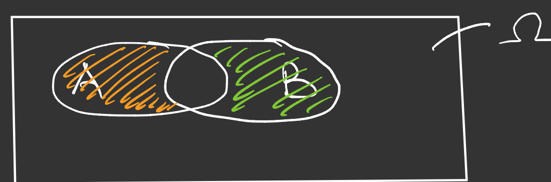
N.B. $A \cap B = \emptyset \implies \mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B)$

FORMULA DELL'UNIONE DI DUE EVENTI

$$A, B \subset \Omega \implies \mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B).$$

$$\left(\leq \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B)\right)$$

DIM.



$$A \cup B = (A \setminus B) \cup (A \cap B) \cup (B \setminus A)$$

$$A = (A \setminus B) \cup (A \cap B)$$

$$B = (B \setminus A) \cup (A \cap B)$$

$$\mathbb{P}(A \cup B) = \underbrace{\mathbb{P}(A \setminus B) + \mathbb{P}(A \cap B)}_{= \mathbb{P}(A)} + \underbrace{\mathbb{P}(B \setminus A) + \mathbb{P}(A \cap B)}_{= \mathbb{P}(B)} - \mathbb{P}(A \cap B)$$

$$= \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B \setminus A) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$$

$$\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(B \setminus A) + \mathbb{P}(A \cap B)$$

$$\mathbb{P}(A \cup B \cup C) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(C) - \mathbb{P}(A \cap B) - \mathbb{P}(A \cap C) - \mathbb{P}(B \cap C) + \mathbb{P}(A \cap B \cap C)$$

Storia della Probabilità

'500 – Rinascimento

<u>Problema della posta.</u> In un gioco a due giocatori, ogni partita vale 1 punto e vince chi per primo raggiunge 7 punti. Due giocatori A e B si sfidano. Sapendo che il premio è 22 ducati, se il gioco viene interrotto quando A è a 5 punti e B a 3 punti, come va suddivisa la posta in gioco?

1654 – Fermat – Pascal

SCHEDA DI ESERCIZI 1

ESERCIZIO 2

Chiara e Marco acquistano uno dei 50 biglietti di una pesca di beneficenza. Ci sono 50 premi di cui 7 piacciono a Chiara, 5 a Marco e 1 solo ad entrambi.

1) $\Omega = ?$ $\qquad \Omega = \{1, 2, \dots, 50\}$

2) C = " il premio piace a Chiara "

M = " " " " " Marco "

(a) il premio piace a entrambi: $C \cap M$

(b) " " " ad almeno uno dei due: $C \cup M$

(c) " " " a nessuno dei due: $(C \cup M)^c$

(d) " " " a uno solo dei due: $(C \setminus M) \cup (M \setminus C)$
$= (C \cup M) \setminus (C \cap M)$

$C = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\} \subset \Omega$

$M = \{7, 8, 9, 10, 11\}$

(d) $(C \cup M) \setminus (C \cap M) = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10, 11\}$

ESERCIZIO 6

prova di Bernoulli : $\begin{cases} \nearrow 1 & \text{successo} \\ \searrow 0 & \text{insuccesso} \end{cases}$

$$\Omega = \{0,1\} \times \dots \times \{0,1\} =$$
$$= \{0,1\}^5 = \{(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) : x_i \in \{0,1\}\}$$

$E_n =$ "successo alla prova n-esima", $n = 1, \dots, 5$.

$$E_3 = \{(x_1, x_2, 1, x_4, x_5) : x_i \in \{0,1\},\ i = 1,2,4,5\}$$

$|\Omega| = 2^5$ e $|E_n| = 2^4$

1) $A =$ " solo insuccessi" $= \{(0,0,0,0,0)\}$

$= E_1^c \cap E_2^c \cap E_3^c \cap E_4^c \cap E_5^c$

$E_3^c = \{(x_1, x_2, 0, x_4, x_5) : x_i \in \{0,1\},\ i = 1,2,4,5\}$

2) $B =$ " solo la terza prova dà un successo" $=$

$= \{(0,0,1,0,0)\} = E_1^c \cap E_2^c \cap E_3 \cap E_4^c \cap E_5^c$

3) $C =$ "nelle prove dispari ci sono solo successi"

$= E_1 \cap E_3 \cap E_5 = \{(1, x_2, 1, x_4, 1) : x_i \in \{0,1\},\ i = 2,4\}$

4) $D =$ " solo un successo " $= \{(1,0,0,0,0), (0,1,0,0,0),$

$(0,0,1,0,0), (0,0,0,1,0), (0,0,0,0,1)\} =$

$= \left(E_1 \cap E_2^c \cap E_3^c \cap E_4^c \cap E_5^c\right) \cup \left(E_1^c \cap E_2 \cap E_3^c \cap E_4^c \cap E_5^c\right) \cup \dots$

ESERCIZIO 8

Una ditta riceve richieste di forniture, che possono essere URGENTI oppure no, IN CITTÀ oppure FUORI CITTÀ.

(i) La probabilità che sia FUORI CITTÀ è 0.4.

(ii) " " " " URGENTE è 0.3.

(iii) " " " " IN CITTÀ e NON URGENTE è 0.4.

La prob. che sia URGENTE e FUORI CITTÀ.

C = "consegna in città"

U = " " urgente"

$$\left.\begin{array}{l}\text{(i) } \mathbb{P}(C^c) = 0.4 \\ \text{(ii) } \mathbb{P}(U) = 0.3 \\ \text{(iii) } \mathbb{P}(C \cap U^c) = 0.4\end{array}\right\} \mathbb{P}(C^c \cap U) = 0.1$$

$$\Omega = \{ \overset{0.2}{(c,u)}, \overset{0.1}{(\bar{c},u)}, \overset{0.4}{(c,\bar{u})}, \overset{0.3}{(\bar{c},\bar{u})} \} = \{c, \bar{c}\} \times \{u, \bar{u}\}$$

$$C = \{(c,u), (c,\bar{u})\} \Longrightarrow \mathbb{P}(C) = 1 - \mathbb{P}(C^c) = 0.6$$

$$\text{(iii)} \Rightarrow \mathbb{P}(\{(c,\bar{u})\}) = 0.4 \Longrightarrow \mathbb{P}(\{(c,u)\}) = 0.2$$

$$\text{(ii)} \Rightarrow \mathbb{P}(U) = \mathbb{P}(\{(c,u), (\bar{c},u)\}) = 0.3$$

$$\Longrightarrow \mathbb{P}(\{(\bar{c},u)\}) = 0.1$$