Spazio campionario : Ω

Sottoinsiemi si chiamano eventi → casi fav. / casi contrari

Ω = evento certo

$\emptyset$ = evento impossibile

$A = \{\omega\}$ = evento elementare

ESEMPIO

A = " esce un numero naturale compreso tra 1 e 6 "

B = " esce un numero > 6 "

C = " esce il 2 "

$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

$A = \Omega$

$B = \emptyset$

$C = \{2\}$

N.B. $\Omega = \mathbb{R}$

$B = (6, +\infty)$

OPERAZIONI TRA EVENTI

CONNETTIVI LOGICI	OPERAZIONI / RELAZIONI INSIEMISTICHE
DISGIUNZIONE A o B	UNIONE $A \cup B$
CONGIUNZIONE A e B	INTERSEZIONE $A \cap B$
NEGAZIONE non $A = \bar{A}$	COMPLEMENTAZIONE A^C
IMPLICAZIONE $A \Longrightarrow B$	INCLUSIONE $A \subset B$
DOPPIA IMPLICAZIONE $A \Longleftrightarrow B$	UGUAGLIANZA $A = B$

OSS. Quali sottoinsiemi di Ω sono eventi? Per noi tutti; $\mathcal{P}(\Omega)$

1) Ω ha cardinalità finita o numerabile, allora tutti i sottoinsiemi di Ω sono eventi.

2) $\Omega = \mathbb{R}$

σ - algebra (booleana) è una famiglia di sottoinsiemi di Ω, indicata con $\mathcal{F}$, tale che:

a) $\Omega \in \mathcal{F}$

b) $A \in \mathcal{F} \implies A^c \in \mathcal{F}$ $\quad (\emptyset \in \mathcal{F})$

c) $(A_n)_{n \in \mathbb{N}} \implies \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{F}$

Se $\Omega = \mathbb{R}$, si definisce la prob. sugli intervalli $[a, b]$, $[a,b)$, $(a, b]$, (a,b)

la più piccola σ-algebra che contiene gli intervalli.

σ-algebra di Borel :

$$\mathcal{B}(\mathbb{R}) = \mathcal{F}$$

$$\mathcal{B}(\mathbb{R}) \overset{?}{=} \mathcal{P}(\mathbb{R})$$

insieme di Vitali

ASSIOMI DELLA PROBABILITÀ

1) A ciascun sottoinsieme A di Ω è assegnato un numero $\mathbb{P}(A)$ che verifica

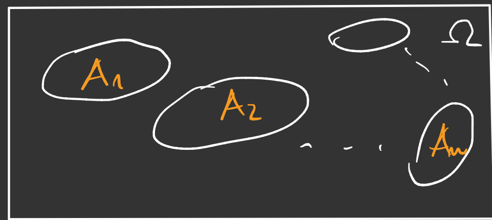
$$0 \leq \mathbb{P}(A) \leq 1$$

Questo numero si chiama probabilità di A.

2) $\mathbb{P}(\Omega) = 1$.

3) σ-additività o additività numerabile: $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ disgiunti (cioè $A_i \cap A_j = \emptyset$, $\forall i \neq j$)

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_n).$$



$$\mathbb{P}(A_1 \cup A_2) = \mathbb{P}(A_1) + \mathbb{P}(A_2)$$

1) equivale a dire che $\mathbb{P}$ è una funzione d'insieme:

$$\mathbb{P} : \mathcal{P}(\Omega) \longrightarrow [0, 1]$$

$\mathbb{P}$ è discreta se assume un numero finito o al più un'infinità numerabile di valori.

ESEMPIO

$\Omega = \mathbb{R}$ e x_0 numero fissato. La delta di Dirac centrata in x_0 è data da

$$\delta_{x_0} : \mathcal{P}(\mathbb{R}) \longrightarrow [0,1]$$

$$A \longmapsto \delta_{x_0}(A) = \begin{cases} 1, & \text{se } x_0 \in A, \\ 0, & \text{se } x_0 \notin A. \end{cases}$$

$$\delta_{x_0}(\{x_0\}) = 1$$

$$H(x) = \begin{cases} 1, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$$

ESEMPIO (PROBABILITÀ DISCRETA)

$x_1, \dots, x_n, \dots \in \mathbb{R}$

$p_1, \dots, p_n, \dots \in [0,1]$ tali che $\sum_{n=1}^{\infty} p_n = 1$

$$\mathbb{P}(A) = \sum_{n=1}^{\infty} p_n \delta_{x_n}(A)$$

$$\mathbb{P}(\Omega) = \sum_{n=1}^{\infty} p_n = 1$$

Definizione

Si chiama spazio di probabilità la coppia

$(\Omega, \mathbb{P})$

OSS. Se c'è la σ-algebra $\mathcal{F}$,

$$\mathbb{P} : \mathcal{F} \longrightarrow [0, 1]$$

la terna $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ si chiama spazio di probabilità.

Conseguenze degli assiomi

Teorema

$(\Omega, \mathbb{P})$ sp. di prob. Allora vale che:

4) $\mathbb{P}(\emptyset) = 0$

5) addititività finita: A e B disgiunti $(A \cap B = \emptyset)$

$$\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B).$$

$A_1, \dots, A_n$ disgiunti $(A_i \cap A_j = \emptyset, \ \forall i \neq j)$

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(A_i).$$

6) $\mathbb{P}(A^c) = 1 - \mathbb{P}(A)$

7) Monotonia: $A \subset B \implies \mathbb{P}(A) \leq \mathbb{P}(B).$

DIMOSTRAZIONE

4) $\mathbb{P}(\emptyset)=0$. Sia $A_n=\emptyset$, $\forall n\in\mathbb{N}$: $\emptyset, \emptyset, \dots, \emptyset, \dots$

Vale che $A_i \cap A_j = \emptyset$.

$$\mathbb{P}(\emptyset)=\mathbb{P}\Big(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\Big)=\sum_{n=1}^{\infty}\mathbb{P}(A_n)=\sum_{n=1}^{\infty}\mathbb{P}(\emptyset)$$

$\hookrightarrow \emptyset$

$p := \mathbb{P}(\emptyset)\in[0,1]$

$$p=\sum_{n=1}^{\infty} p \rightarrow \begin{cases} 0=0 & \text{se } p=0 \\ p=+\infty & \text{se } p\neq 0 \end{cases}$$

5) Additività finita: A e B, con $A \cap B = \emptyset$, vogliamo mostrare che

$$\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B).$$

$(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $A_1 = A$, $A_2 = B$, $A_n = \emptyset$, $\forall n \geq 3$.

Dalla σ-additività

$$\mathbb{P}(\underbrace{\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n}_{\hookrightarrow A \cup B}) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_n) \underset{\uparrow}{=} \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B)$$

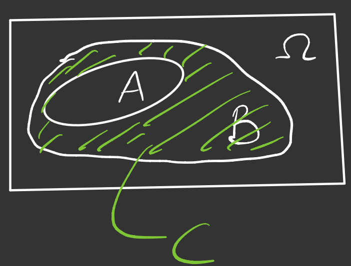
$\mathbb{P}(A_n) = 0$, $\forall n \geq 3$

6) $\mathbb{P}(A^c) = 1 - \mathbb{P}(A)$

$$\Omega = A \cup A^c$$

$$1 = \mathbb{P}(\Omega) = \mathbb{P}(A \cup A^c) \underset{\uparrow \text{ Add.}}{=} \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(A^c)$$

7) Monotonia: $A \subset B \Longrightarrow \mathbb{P}(A) \le \mathbb{P}(B)$



$B = A \cup C$, dove $C = B \setminus A$

$$\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(A) + \underbrace{\mathbb{P}(C)}_{\geq 0} \geq \mathbb{P}(A)$$

NOTAZIONI

1) Un evento A si dice quasi certo $\rightarrow$ q.c. se $\mathbb{P}(A) = 1$.

2) Un evento A si dice quasi impossibile se $\mathbb{P}(A)=0$.

A = "esce un numero naturale"

$\mathbb{P}(A) = 1$, cioè A è q.c.

$\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$

$A = \Omega$

$\Omega = \mathbb{R}$

$A = \mathbb{N}$

$B = \{1,2,3,4,5,6\}$

ESEMPIO

Lanciamo un dado perfettamente bilanciato a sei facce. Qual è la probabilità che esca un numero ≥ 3?

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

$A =$ " esce un numero ≥ 3" $\Longrightarrow A = \{3, 4, 5, 6\}$

$\Omega = \{1, \dots, 12\}$ $\mathbb{P}(\{i\}) = 0$ $\forall i \geq 7$

$A = \{3, \dots, 12\}$

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(\{3\}) + \mathbb{P}(\{4\}) + \mathbb{P}(\{5\}) + \mathbb{P}(\{6\}) = \frac{4}{6}$$

Perf. bil. $\Longleftrightarrow$ $\left.\begin{array}{l} \mathbb{P}(\{1\}) = \dots = \mathbb{P}(\{6\}) \\ \text{Dato che } \mathbb{P}(\Omega) = 1 = \sum_i \mathbb{P}(\{i\}) \end{array}\right\} \Longrightarrow \mathbb{P}(\{i\}) = \frac{1}{6}$

$$\mathbb{P}(A) = \frac{4}{6} = \frac{\text{casi fav.}}{\text{casi poss.}} = \text{Formula di Laplace}$$

formula di Laplace: Ω è finito

$$\mathbb{P}(\{\omega\}) = \frac{1}{|\Omega|}, \quad \forall \omega \in \Omega.$$

UNIFORME