Berger, Caravenna, Dai Pra, "Probabilità", Springer 2021

<u>Che cos'è la probabilità?</u>

$A =$ "domani a Bologna piove"

$$\begin{tikzcd} & 0 \quad \text{falsa} \\ A \arrow[ur] \arrow[dr] & \\ & 1 \quad \text{vera} \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r] & \mathbb{P}(A) \in [0,1] \arrow[d] \\ & \text{"misura dell'avverabilità di un evento"} \end{tikzcd}$$

Come si assegna / stima la probabilità?

$$\mathbb{P}(A) \simeq \frac{n^\circ \text{ volte che si verifica } A}{n}$$

$= \text{frequenza relativa di } A = f(A)$

<u>Approccio bayesiano</u>: informazioni a priori + frequenze

La matematica della probabilità

A = "a Bologna domani piove"

B = "domani a Bologna la temperatura $> 25°C$"

C = A e B

$\mathbb{P}(A)$

$\mathbb{P}(C) = \mathbb{P}(A \text{ e } B) = \ldots$

$\mathbb{P}(B)$

Richiami di teoria degli insiemi

Ω (omega)

$\omega \in \Omega$ (elemento)

$A \subset \Omega$, $A \subseteq \Omega$ (ϕ, Ω sottoinsiemi impropri)

$\mathcal{P}(\Omega) = \{ A \subset \Omega \}$

cardinalità: $|A|$, $\# A$ = n° elementi di A

ESEMPIO

$$\Omega = \{a, b, c\} \Longrightarrow |\mathcal{P}(\Omega)| = 8 = 2^3 = 2^{|\Omega|}$$

$$\mathcal{P}(\Omega) = \{\phi, \Omega, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{b, c\}, \{a, c\}\}$$

In generale, $|\Omega| = n \Longrightarrow \mathcal{P}(\Omega) = 2^n$.

OPERAZIONI INSIEMISTICHE

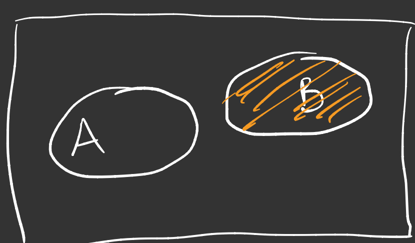
unione: $A \cup B = \{\omega \in \Omega : \omega \in A \text{ o } \omega \in B\}$

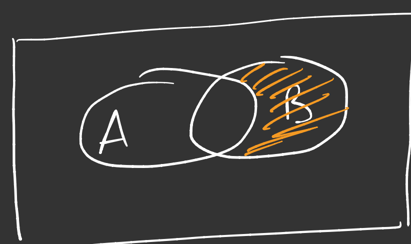
intersezione: $A \cap B = \{\omega \in \Omega : \omega \in A \text{ e } \omega \in B\}$

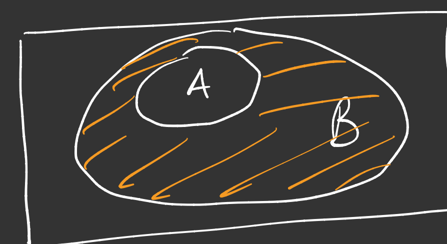
unione: $A_1 \cup \dots \cup A_n = \{\omega \in \Omega : \omega \in A_i, \text{ per qualche } i\}$

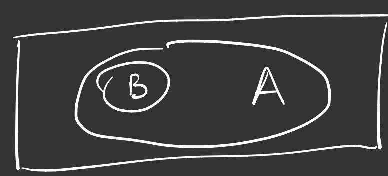
intersezione: $A_1 \cap \dots \cap A_n = \{\omega \in \Omega : \omega \in A_i, \text{ per ogni } i\}$

differenza: $B \setminus A = \{\omega \in B : \omega \notin A\}$, Se $B = \Omega$ allora $A^c := \Omega \setminus A$









$B \setminus A = \emptyset$

Le leggi di De Morgan

1) $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$, 2) $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$.

Dim di 1)

$(A \cup B)^c \subset A^c \cap B^c$ e $(A \cup B)^c \supset A^c \cap B^c$

$$\omega \in (A \cup B)^c = \Omega \setminus (A \cup B) \iff \omega \notin A \cup B$$

$$\iff \omega \notin A \text{ e } \omega \notin B$$

$$\iff \omega \in A^c \text{ e } \omega \in B^c$$

$$\iff \omega \in A^c \cap B^c$$

Proprietà distributive

unione rispetto intersezione: $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

$$A \cup \left(\bigcap_{i=1}^{n} B_i \right) = \bigcap_{i=1}^{n} (A \cup B_i)$$

intersezione rispetto unione: $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

$$A \cap \left(\bigcup_{i=1}^{n} B_i \right) = \bigcup_{i=1}^{n} (A \cap B_i)$$

Unioni e intersezioni numerabili

$(A_n)_{n \in \mathbb{N}} = \{A_n\}_{n \in \mathbb{N}}$

ESEMPIO $\quad \Omega = \mathbb{R} \qquad A_n = \{n\}$ singleton

$\{1\}, \{2\}, \{3\}, \dots, \{n\}, \dots$

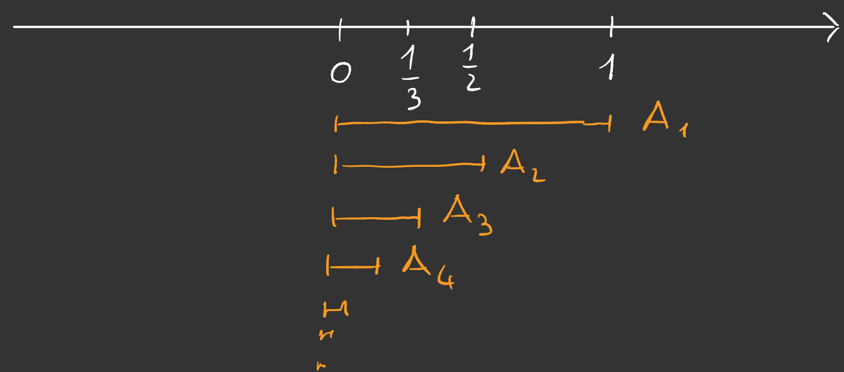
$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \{\omega \in \Omega : \omega \in A_n, \text{ per qualche } n\}$$

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = \{\omega \in \Omega : \omega \in A_n, \text{ per ogni } n\}$$

ESEMPIO

1) $\Omega = \mathbb{R}$, $A_n = \{n\}$, $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \mathbb{N}$ e $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = \emptyset$

2) $\Omega = \mathbb{R}$, $A_n = [0, \frac{1}{n}]$, $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = A_1 = [0,1]$ e $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = \{0\}$



Esperimento aleatorio

1) Un **esperimento aleatorio** (detto anche **fenomeno aleatorio** o **prova** o **situazione d'incertezza**) è un esperimento di cui non conosciamo con certezza il risultato.

2) Un **esito** è un ipotetico risultato dell'esperimento aleatorio.

ESEMPIO Lancio della moneta, esiti $<$ testa / croce

N.B. **salto - esperimenti aleatori**

Definizione

Un **evento** è un'affermazione riguardante l'ipotetico risultato dell'esp. al., di cui è possibile dire con certezza se è VERA o FALSA una volta noto l'esito dell'esp. al.

Gli esiti per cui un evento è VERO si chiamano **casi favorevoli**, gli altri si chiamano casi contrari.

ESEMPIO

A = "esce un numero pari"

NOTAZIONE:

$A, B, C, \ldots$

Definizione

Si chiama **spazio campionario** un qualunque insieme che contiene tutti gli esiti dell'esp. al., rappresentati secondo un opportuno codice.

NOTAZIONE: Ω = sp. camp.

ω = elemento di Ω = esito

Definizione

Ogni evento (inteso come proposizione) è rappresentato dal sottoinsieme di Ω dei casi favorevoli (è rappresentato da $\emptyset$ se non ci sono casi favorevoli).

ESEMPIO: Lancio di una moneta: $\Omega = \{\text{testa}, \text{croce}\}$

$= \{1, 0\}$

$\Omega = \mathbb{R}$

ESEMPIO

$A =$ "esce un numero pari"

1) $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

$A = \{2, 4, 6\}$

2) $\Omega = \mathbb{R}$

$A = \{2k : k \in \mathbb{Z}\}$