Calcolo delle Probabilità e Statistica 2021/2022

Scheda di esercizi 7 - Catene di Markov

Esercizio 1. Si consideri una catena di Markov $(X_n)_n$ con spazio degli stati $\mathcal{S} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ e matrice di transizione

$$\Pi = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1/3 & 0 & 0 & 1/3 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

(a) Rappresentare graficamente la catena di Markov tramite un grafo orientato.

(b) Determinare le classi comunicanti.

(c) Calcolare $\pi_{12}^{(4)}$.

(d) Calcolare $\mathbb{P}(X_3 = 2)$ sapendo che la densità discreta di X_1 è data da

X_1	1	2	3	4	5	6
p_{X_1}	1/2	1/4	0	0	0	1/4

Esercizio 2. Si consideri una catena di Markov $(X_n)_n$ con spazio degli stati $\mathcal{S} = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ e matrice di transizione

$$\Pi = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/4 & 1/4 & 1/4 & 1/4 \\ 1/2 & 0 & 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}.$$

(a) Rappresentare graficamente la catena di Markov tramite un grafo orientato.

(b) Determinare le classi comunicanti.

(c) Calcolare $\pi_{45}^{(3)}$.

(d) Calcolare $\mathbb{P}(X_2 = 4)$ sapendo che la densità discreta di X_1 è data da

X_1	1	2	3	4	5
p_{X_1}	1/3	0	1/3	1/3	0

Esercizio 3. Si consideri una catena di Markov $(X_n)_n$ con spazio degli stati $\mathcal{S} = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ e matrice di transizione

$$\Pi = \begin{pmatrix} 1/3 & 0 & 1/12 & 1/4 & 1/3 \\ 0 & 1/4 & 0 & 0 & 3/4 \\ 1/3 & 1/12 & 1/2 & 0 & 1/12 \\ 0 & 1/3 & 0 & 1/4 & 5/12 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

(a) Rappresentare graficamente la catena di Markov tramite un grafo orientato.

(b) Determinare le classi comunicanti.

(c) Calcolare $\pi_{32}^{(3)}$.

(d) Calcolare $\mathbb{P}(X_3 = 5)$ sapendo che la densità discreta di X_1 è data da

X_1	1	2	3	4	5
p_{X_1}	1/5	0	0	2/5	2/5

Esercizio 4. Si consideri una catena di Markov $(X_n)_n$ con spazio degli stati $\mathcal{S} = \{1, 2, 3, 4\}$ e matrice di transizione

$$\Pi = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/4 & 1/4 \\ 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

(a) Rappresentare graficamente la catena di Markov tramite un grafo orientato.

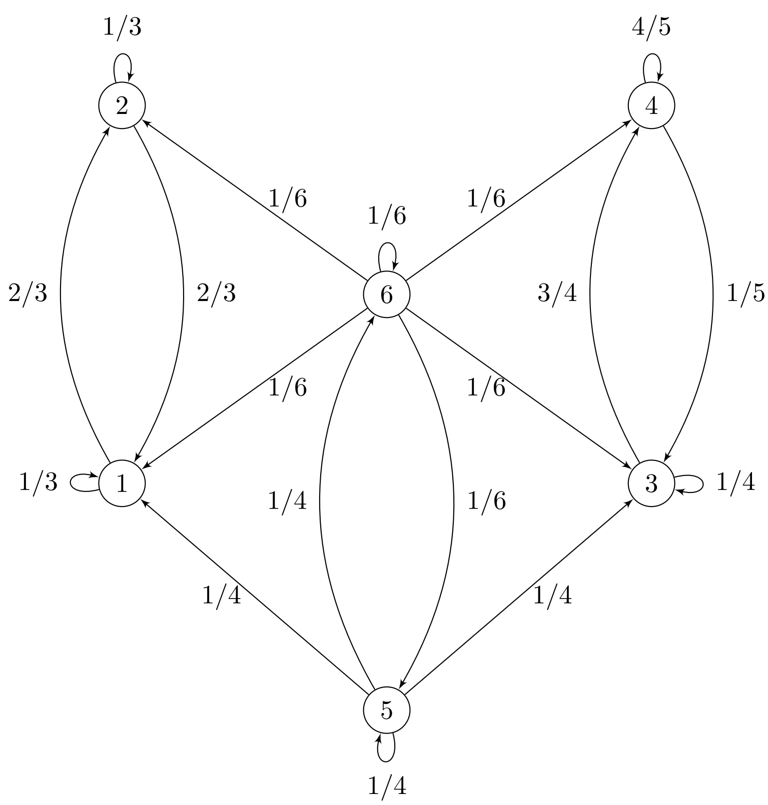
(b) La catena di Markov è irriducibile?

(c) Calcolare $\pi_{34}^{(3)}$.

(d) Calcolare $\mathbb{P}(X_2 = 1)$ sapendo che la densità discreta di X_1 è data da

X_1	1	2	3	4
p_{X_1}	1/2	0	1/2	0

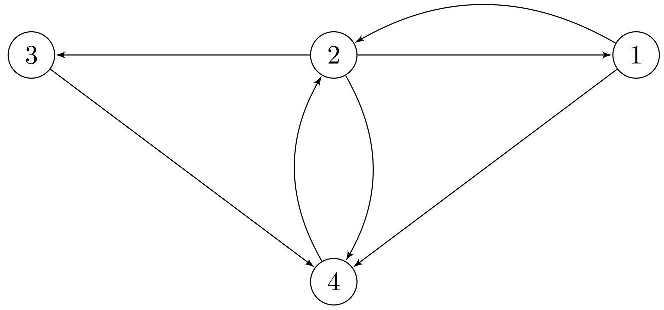
Esercizio 5. Si consideri una catena di Markov $(X_n)_n$ con spazio degli stati $\mathcal{S} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, rappresentata dal seguente grafo orientato:



(a) Qual è la matrice di transizione di $(X_n)_n$?

(b) Determinare le classi comunicanti.

Esercizio 6. Si consideri una versione semplificata del web, descritta dal seguente grafo orientato, in cui ogni nodo corrisponde ad una pagina, mentre le frecce rappresentano i link tra le pagine:



Supponiamo di partire dalla pagina numero 1 e di effettuare una passeggiata aleatoria nel web, scegliendo ad ogni passo un link a caso dalla pagina in cui ci troviamo (più precisamente, si suppongano equiprobabili tra loro i link uscenti da una data pagina). Sia $(X_n)_n$ la catena di Markov che descrive tale passeggiata aleatoria.

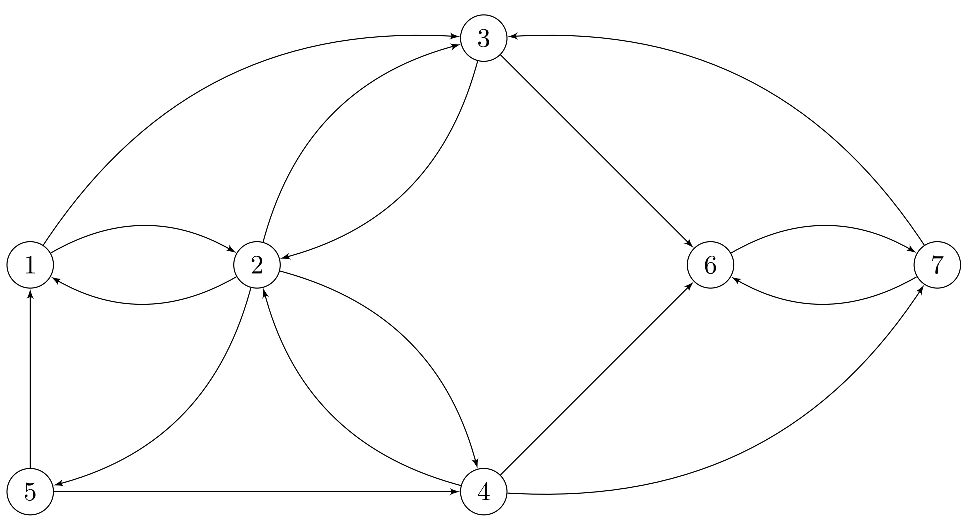
(a) Qual è la distribuzione iniziale della catena di Markov, ovvero qual è la densità discreta di X_1?

(b) Si rappresenti graficamente la catena di Markov tramite un grafo orientato.

(c) Qual è la matrice di transizione di $(X_n)_n$?

(d) Determinare le classi comunicanti.

Esercizio 7. Si consideri una versione semplificata del web, descritta dal seguente grafo orientato, in cui ogni nodo corrisponde ad una pagina, mentre le frecce rappresentano i link tra le pagine:



Supponiamo di partire dalla pagina numero 3 e di effettuare una passeggiata aleatoria nel web, scegliendo ad ogni passo un link a caso dalla pagina in cui ci troviamo (più precisamente, si suppongano equiprobabili tra loro i link uscenti da una data pagina). Sia $(X_n)_n$ la catena di Markov che descrive tale passeggiata aleatoria.

(a) Qual è la distribuzione iniziale della catena di Markov, ovvero qual è la densità discreta di X_1?

(b) Si rappresenti graficamente la catena di Markov tramite un grafo orientato.

(c) Qual è la matrice di transizione di $(X_n)_n$?

(d) Determinare le classi comunicanti.

Esercizio 8. Consideriamo un sistema a sei stati numerati da 1 a 6, la cui evoluzione nel tempo è descritta da una catena di Markov $(X_n)_{n\geq 1}$. Ad ogni istante n, si lancia un dado (equilibrato e a sei facce) e sulla base del risultato il sistema evolve come descritto qui di seguito:

- se esce 1, il sistema si sposta in tale stato;
- se esce un numero maggiore dello stato presente, il sistema si sposta nello stato successivo;
- negli altri casi, il sistema rimane nello stato presente.

1) Determinare la matrice di transizione e disegnare il corrispondente grafo orientato.
2) Quali sono le classi comunicanti?
3) Sapendo che all'istante n il sistema si trova nello stato 3, qual è la probabilità che il sistema si trovi nello stato 4 all'istante $n+2$?
4) Trovare la distribuzione invariante del sistema.

Esercizio 9. Sei palline, due bianche e quattro rosse, sono distribuite a caso in due urne A e B (tre sfere ciascuna). Si estraggono due palline, una da ogni urna. Dopodiché, ogni pallina pescata viene messa nell'altra urna, anziché in quella da cui è stata estratta. Le estrazioni proseguono seguendo sempre la stessa procedura. Fissiamo la nostra attenzione sull'urna A e consideriamo nel tempo il numero di palline rosse contenute in A. Sia, in particolare,

$$X_n \;=\; \text{“n}^{\text{o}} \text{ di palline rosse contenute nell'urna } A \text{ dopo } n \text{ estrazioni”}, \qquad \forall\, n \geq 0.$$

Si noti che X_0 è il n$^{\text{o}}$ di palline rosse contenute nell'urna A nella configurazione iniziale, cioè prima che comincino le estrazioni.

1) La successione $(X_n)_{n\geq 0}$ è una catena di Markov a tempo discreto, omogenea e a stati finiti. Determinare spazio degli stati, matrice di transizione e disegnare il corrispondente grafo orientato.
2) Quali sono le classi comunicanti?
3) Sapendo che nell'urna A ci sono due palline rosse, qual è la probabilità che dopo tre estrazioni ce ne siano tre?
4) Qual è la densità discreta di X_0?

Esercizio 10. Una pedina si muove su un circuito circolare a 4 vertici, numerati da 1 a 4. La pedina si trova inizialmente nel vertice 1. Ad ogni passo un giocatore lancia un dado equilibrato a quattro facce:

- se la pedina si trova nello stato 1, essa avanza di una posizione in caso di risultato dispari e di tre posizioni in caso di risultato pari;
- se la pedina si trova nello stato 2, essa avanza di una posizione in caso di risultato dispari, altrimenti salta nello stato 1;
- se la pedina si trova nello stato 3, essa avanza di una posizione in caso di risultato dispari, altrimenti salta nello stato 2;
- se la pedina si trova nello stato 4, essa passa nello stato 1 nel caso in cui il risultato del dado sia 4, altrimenti resta nello stato 4.

La posizione della pedina può essere descritta da una catena di Markov $(X_n)_{n\geq 0}$ in cui

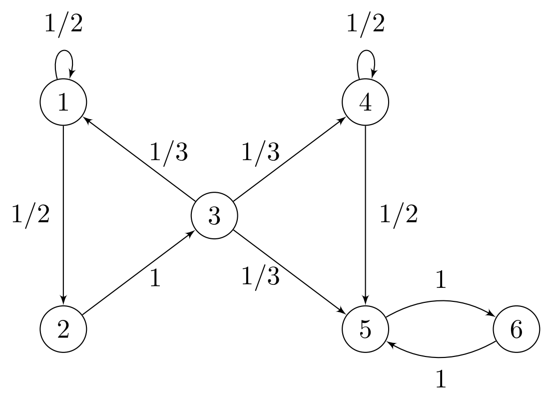
$$X_n \;=\; \text{“n}^{\text{o}} \text{ del vertice occupato dalla pedina dopo } n \text{ passi”}, \qquad n \geq 1,$$

mentre X_0 è la posizione iniziale della pedina.

1) Determinare spazio degli stati e matrice di transizione e disegnare il corrispondente grafo orientato.
2) Sapendo che la pedina si trova in 4, qual è la probabilità che si trovi in 1 dopo due passi?
3) Calcolare densità discreta e valore atteso di X_2.
4) Calcolare $\mathbb{P}(X_1 = 2 | X_2 = 1)$.

Esercizio 1.

(a) Il grafo orientato associato alla catena di Markov è il seguente:



(b) Le classi comunicanti sono: $\{1,2,3\}$, $\{4\}$, $\{5,6\}$.

(c) $\pi_{12}^{(4)}$ si può calcolare in due modi. Infatti, $\pi_{12}^{(4)}$ è l'elemento nella riga 1 e colonna 2 della matrice Π^4. Alternativamente, utilizzando il grafo osserviamo che ci sono solo due cammini per andare dal nodo 1 al nodo 2 in quattro passi: $1 \to 1 \to 1 \to 1 \to 2$ e $1 \to 2 \to 3 \to 1 \to 2$. Quindi

$$\pi_{12}^{(4)} = \underbrace{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}}_{\text{prob. cammino } 1\to1\to1\to1\to2} + \underbrace{\frac{1}{2}\cdot 1\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}}_{\text{prob. cammino } 1\to2\to3\to1\to2} = \frac{7}{48}.$$

(d) $\mathbb{P}(X_3 = 2)$ è il secondo elemento del vettore riga $\vec{\boldsymbol{p}}_{\boldsymbol{X_3}} = \vec{\boldsymbol{p}}_{\boldsymbol{X_1}}\Pi^2$. Quindi

$$\mathbb{P}(X_3 = 2) = \sum_{i=1}^{6} p_{X_1}(i)\,\pi_{i2}^{(2)} = \frac{1}{2}\,\pi_{12}^{(2)} + \frac{1}{4}\,\pi_{22}^{(2)} + \frac{1}{4}\,\pi_{62}^{(2)}.$$

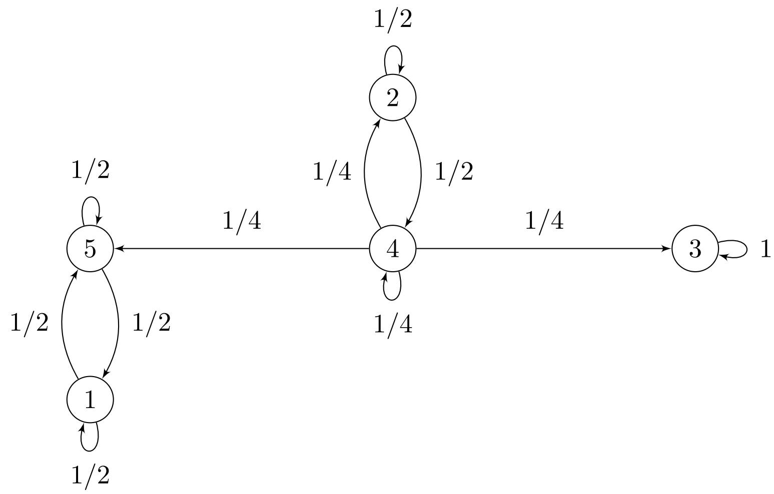
Procedendo come nel punto (c), otteniamo

$$\begin{aligned}
\pi_{12}^{(2)} &= \underbrace{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}}_{\text{prob. cammino } 1\to1\to2} = \frac{1}{4},\\
\pi_{22}^{(2)} &= 0,\\
\pi_{62}^{(2)} &= 0.
\end{aligned}$$

Quindi $\mathbb{P}(X_3 = 2) = \frac{1}{8}$.

Esercizio 2.

(a) Il grafo orientato associato alla catena di Markov è il seguente:



(b) Le classi comunicanti sono: $\{1,5\}$, $\{2,4\}$, $\{3\}$.

(c)

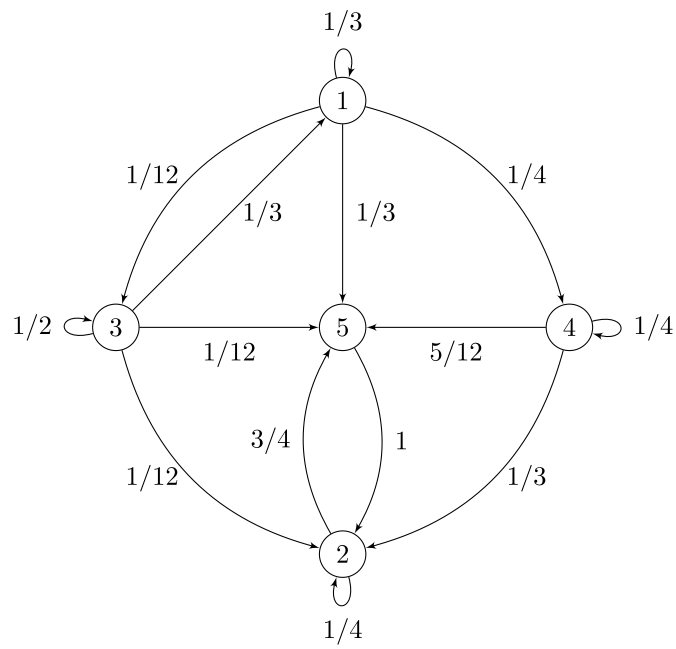
$$\pi_{45}^{(3)} = \underbrace{\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4}}_{\text{prob. cammino } 4\to4\to4\to5} + \underbrace{\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2}}_{\text{prob. cammino } 4\to4\to5\to5} + \underbrace{\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}}_{\text{prob. cammino } 4\to5\to5\to5} + \underbrace{\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}}_{\text{prob. cammino } 4\to5\to1\to5} + \underbrace{\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}}_{\text{prob. cammino } 4\to2\to4\to5} = \frac{13}{64}.$$

(d) $\mathbb{P}(X_2 = 4)$ è il quarto elemento del vettore riga $\vec{\boldsymbol{p}}_{\boldsymbol{X_2}} = \vec{\boldsymbol{p}}_{\boldsymbol{X_1}}\Pi$, quindi

$$\mathbb{P}(X_2 = 4) = \sum_{i=1}^{5} p_{X_1}(i)\,\pi_{i4} = \frac{1}{3}\,\pi_{14} + \frac{1}{3}\,\pi_{34} + \frac{1}{3}\,\pi_{44} = \frac{1}{3}\,0 + \frac{1}{3}\,0 + \frac{1}{3}\,\frac{1}{4} = \frac{1}{12}.$$

Esercizio 3.

(a) Il grafo orientato associato alla catena di Markov è il seguente:



(b) Le classi comunicanti sono: $\{1,3\}$, $\{2,5\}$, $\{4\}$.

(c)

$$
\begin{aligned}
\pi_{32}^{(3)} \;=\;& \underbrace{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{12}}_{\text{prob. cammino }3\to3\to3\to2} + \underbrace{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{12}\cdot\frac{1}{4}}_{\text{prob. cammino }3\to3\to2\to2} + \underbrace{\frac{1}{12}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4}}_{\text{prob. cammino }3\to2\to2\to2} \\
&+ \underbrace{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{12}\cdot 1}_{\text{prob. cammino }3\to3\to5\to2} + \underbrace{\frac{1}{12}\cdot 1\cdot\frac{1}{4}}_{\text{prob. cammino }3\to5\to2\to2} + \underbrace{\frac{1}{12}\cdot\frac{3}{4}\cdot 1}_{\text{prob. cammino }3\to2\to5\to2} \\
&+ \underbrace{\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}\cdot 1}_{\text{prob. cammino }3\to1\to5\to2} + \underbrace{\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{3}}_{\text{prob. cammino }3\to1\to4\to2} + \underbrace{\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{12}\cdot\frac{1}{12}}_{\text{prob. cammino }3\to1\to3\to2} \;=\; \frac{523}{1728} \;\approx\; 0.3027.
\end{aligned}
$$

(d) $\mathbb{P}(X_3 = 5)$ è il quinto elemento del vettore riga $\vec{\boldsymbol{p}}_{\boldsymbol{X_3}} = \vec{\boldsymbol{p}}_{\boldsymbol{X_1}}\Pi^2$, quindi

$$
\mathbb{P}(X_3 = 5) \;=\; \sum_{i=1}^{5} p_{X_1}(i)\,\pi_{i5}^{(2)} \;=\; \frac{1}{5}\,\pi_{15}^{(2)} + \frac{2}{5}\,\pi_{45}^{(2)} + \frac{2}{5}\,\pi_{55}^{(2)}.
$$

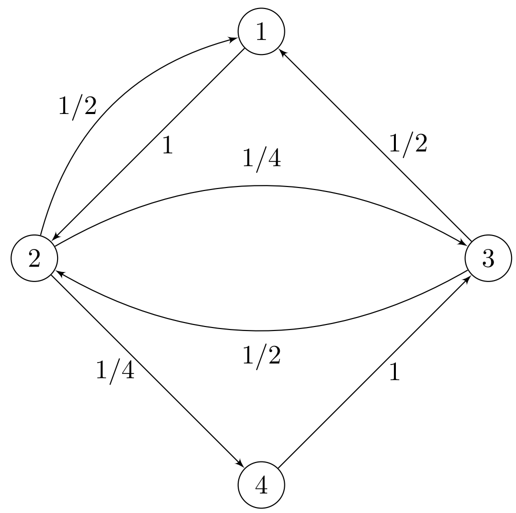
Si ha che

$$
\begin{aligned}
\pi_{15}^{(2)} \;=\;& \underbrace{\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}}_{\text{prob. cammino }1\to1\to5} + \underbrace{\frac{1}{12}\cdot\frac{1}{12}}_{\text{prob. cammino }1\to3\to5} + \underbrace{\frac{1}{4}\cdot\frac{5}{12}}_{\text{prob. cammino }1\to4\to5} \;=\; \frac{2}{9}, \\
\pi_{45}^{(2)} \;=\;& \underbrace{\frac{1}{3}\cdot\frac{3}{4}}_{\text{prob. cammino }4\to2\to5} + \underbrace{\frac{1}{4}\cdot\frac{5}{12}}_{\text{prob. cammino }4\to4\to5} \;=\; \frac{17}{48}, \\
\pi_{55}^{(2)} \;=\;& \underbrace{1\cdot\frac{3}{4}}_{\text{prob. cammino }5\to2\to5} \;=\; \frac{3}{4}.
\end{aligned}
$$

Quindi $\mathbb{P}(X_3 = 5) = \frac{35}{72}$.

Esercizio 4.

(a) Il grafo orientato associato alla catena di Markov è il seguente:



(b) Sì, in quanto $\mathcal{S} = \{1, 2, 3, 4\}$ è l'unica classe comunicante.

(c)

$$\pi_{34}^{(3)} \;=\; \underbrace{\frac{1}{2}\cdot 1\cdot\frac{1}{4}}_{\text{prob. cammino } 3\to1\to2\to4} \;=\; \frac{1}{8}.$$

(d) $\mathbb{P}(X_2 = 1)$ è il primo elemento del vettore riga $\vec{\boldsymbol{p}}_{\boldsymbol{X_2}} = \vec{\boldsymbol{p}}_{\boldsymbol{X_1}}\Pi$, quindi

$$\mathbb{P}(X_2 = 1) \;=\; \sum_{i=1}^{4} p_{X_1}(i)\,\pi_{i1} \;=\; \frac{1}{2}\,\pi_{11} + \frac{1}{2}\,\pi_{31} \;=\; \frac{1}{2}\,0 + \frac{1}{2}\,\frac{1}{2} \;=\; \frac{1}{4}.$$

Esercizio 5.

(a) La matrice di transizione è data da:

$$\Pi \;=\; \begin{pmatrix} 1/3 & 2/3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2/3 & 1/3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/4 & 3/4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/5 & 4/5 & 0 & 0 \\ 1/4 & 0 & 1/4 & 0 & 1/4 & 1/4 \\ 1/6 & 1/6 & 1/6 & 1/6 & 1/6 & 1/6 \end{pmatrix}.$$

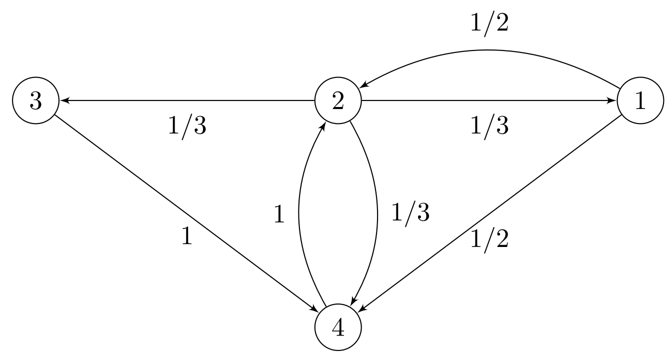
(b) Le classi comunicanti sono: $\{1, 2\}$, $\{3, 4\}$, $\{5, 6\}$.

Esercizio 6.

(a)

X_1	1	2	3	4
p_{X_1}	1	0	0	0

(b) Il grafo orientato associato alla catena di Markov è il seguente:



(c) La matrice di transizione è data da:

$$\Pi = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/3 & 0 & 1/3 & 1/3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

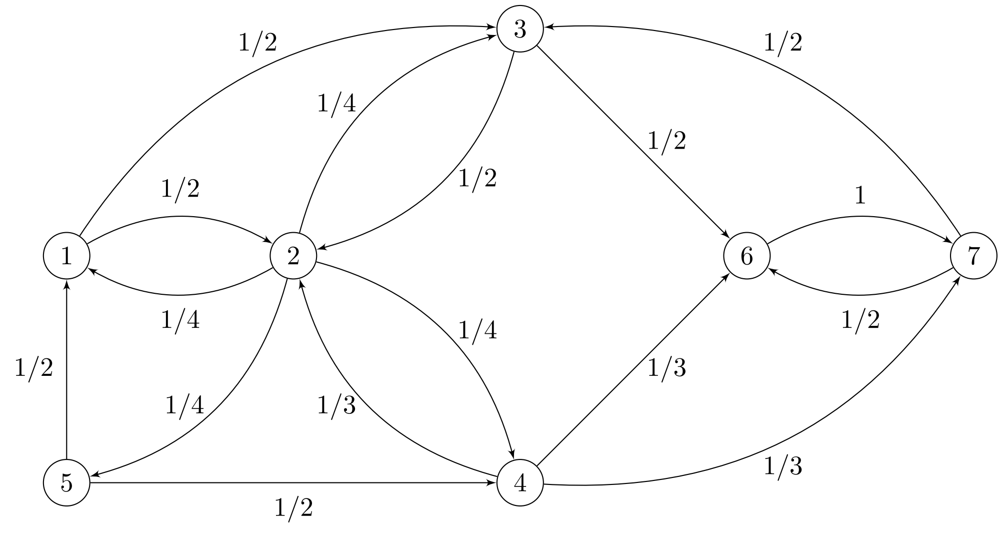
(d) Esiste un'unica classe comunicante, che è quindi data da $\mathcal{S} = \{1, 2, 3, 4\}$.

Esercizio 7.

(a)

X_1	1	2	3	4	5	6	7
p_{X_1}	0	0	1	0	0	0	0

(b) Il grafo orientato associato alla catena di Markov è il seguente:



(c) La matrice di transizione è data da:

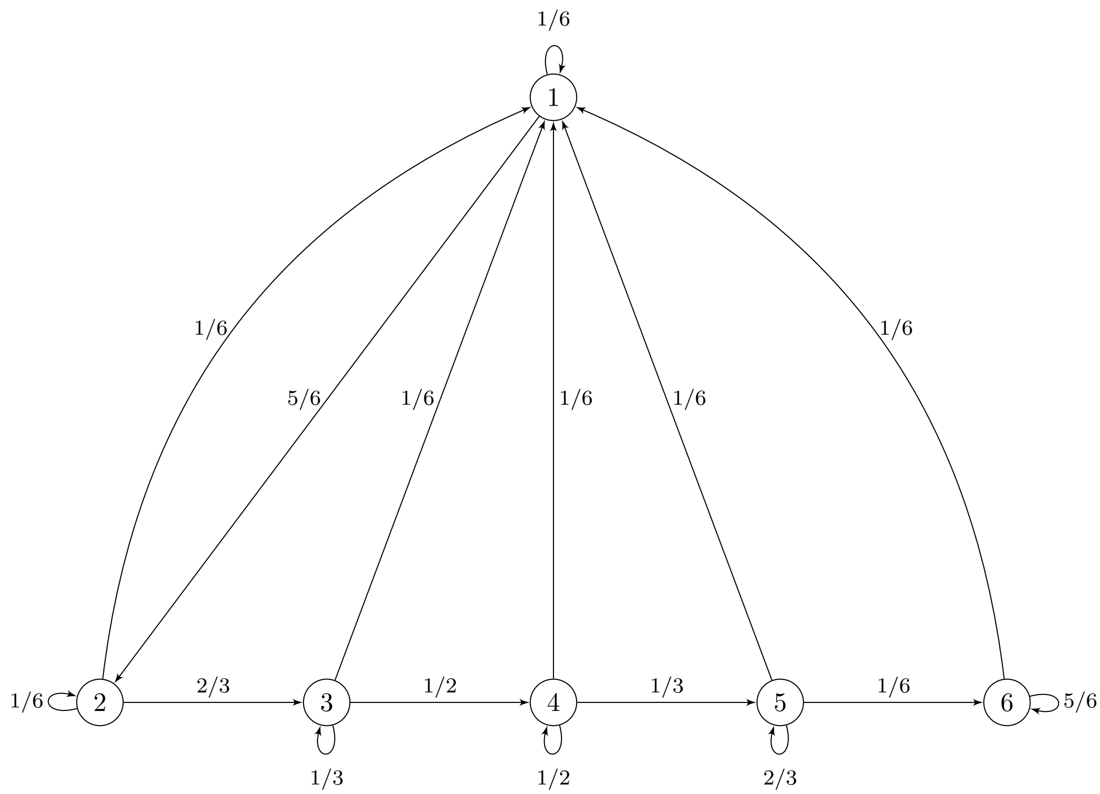
$$\Pi = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 1/2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/4 & 0 & 1/4 & 1/4 & 1/4 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1/3 & 0 & 0 & 0 & 1/3 & 1/3 \\ 1/2 & 0 & 0 & 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1/2 & 0 & 0 & 1/2 & 0 \end{pmatrix}.$$

(d) Esiste un'unica classe comunicante, che è quindi data da $\mathcal{S} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$.

Esercizio 8.

1) $\mathcal{S} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$,

$$\Pi \;=\; \begin{pmatrix} \frac{1}{6} & \frac{5}{6} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{2}{3} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{6} & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{6} & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & 0 \\ \frac{1}{6} & 0 & 0 & 0 & \frac{2}{3} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{6} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{5}{6} \end{pmatrix}$$



2) Esiste un'unica classe comunicante data quindi da $\mathcal{S} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. La catena di Markov è dunque irriducibile.

3) Dobbiamo calcolare $\pi_{34}^{(2)}$. A partire dal grafo orientato, abbiamo che

$$\pi_{34}^{(2)} \;=\; \underbrace{\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}}_{\text{prob. cammino } 3\to3\to4} \;+\; \underbrace{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}}_{\text{prob. cammino } 3\to4\to4} \;=\; \frac{5}{12} \;\approx\; 41.67\%.$$

4) Ricordiamo che una distribuzione invariante è un vettore riga $\vec{\boldsymbol{\pi}} = (\pi_1, \pi_2, \pi_3, \pi_4, \pi_5, \pi_6)$ tale che

$$\vec{\boldsymbol{\pi}} \;=\; \vec{\boldsymbol{\pi}}\,\Pi \qquad \text{e} \qquad \sum_{i=1}^{6} \pi_i \;=\; 1.$$

Queste due uguaglianze corrispondono al seguente sistema:

$$\begin{cases} \pi_1 &= \frac{1}{6}\sum_{i=1}^{6}\pi_i \\ \pi_2 &= \frac{5}{6}\pi_1 + \frac{1}{6}\pi_2 \\ \pi_3 &= \frac{2}{3}\pi_2 + \frac{1}{3}\pi_3 \\ \pi_4 &= \frac{1}{2}\pi_3 + \frac{1}{2}\pi_4 \\ \pi_5 &= \frac{1}{3}\pi_4 + \frac{2}{3}\pi_5 \\ \pi_6 &= \frac{1}{6}\pi_5 + \frac{5}{6}\pi_6 \\ \pi_1 + \pi_2 + \pi_3 + \pi_4 + \pi_5 + \pi_6 &= 1. \end{cases}$$

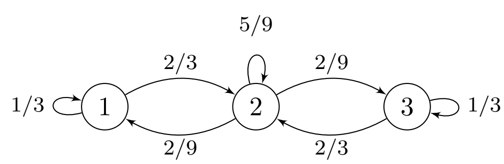
Dalla prima equazione si ottiene $\pi_1 = \frac{1}{6}$. Dalle successive otteniamo $\pi_i = \frac{1}{6}$, per ogni $i = 1, \dots, 6$. Quindi

$$\vec{\boldsymbol{\pi}} = \left(\frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6}\right).$$

Esercizio 9.

1) $\mathcal{S} = \{1, 2, 3\}$,

$$\Pi = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0 \\ \frac{2}{9} & \frac{5}{9} & \frac{2}{9} \\ 0 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$



2) La catena di Markov è irriducibile, ovvero esiste un'unica classe comunicante che è dunque $\{1, 2, 3\}$.

3) Dobbiamo calcolare $\pi_{23}^{(3)}$. A partire dal grafo orientato, abbiamo che

$$\pi_{23}^{(3)} = \underbrace{\frac{5}{9}\cdot\frac{5}{9}\cdot\frac{2}{9}}_{\text{prob. cammino } 2\to2\to2\to3} + \underbrace{\frac{5}{9}\cdot\frac{2}{9}\cdot\frac{1}{3}}_{\text{prob. cammino } 2\to2\to3\to3} + \underbrace{\frac{2}{9}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}}_{\text{prob. cammino } 2\to3\to3\to3}$$
$$+ \underbrace{\frac{2}{9}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{9}}_{\text{prob. cammino } 2\to3\to2\to3} + \underbrace{\frac{2}{9}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{9}}_{\text{prob. cammino } 2\to1\to2\to3} = \frac{146}{729} \approx 0.2003.$$

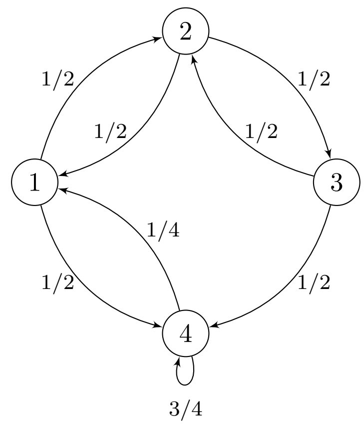
4) "Distribuite a caso" significa che tutte le possibili terne (o meglio, *combinazioni semplici*) sono *equiprobabili*, ovvero che le tre palline che si trovano nell'urna A sono state scelte tramite "estrazione simultanea" dalle sei palline. Per tale ragione, la densità discreta di X_0 è data dalla seguente tabella:

X_0	1	2	3
p_{X_0}	$\frac{\binom{4}{1}\binom{2}{2}}{\binom{6}{3}} = \frac{1}{5}$	$\frac{\binom{4}{2}\binom{2}{1}}{\binom{6}{3}} = \frac{3}{5}$	$\frac{\binom{4}{3}\binom{2}{0}}{\binom{6}{3}} = \frac{1}{5}$

Esercizio 10.

1) $\mathcal{S} = \{1, 2, 3, 4\}$,

$$\Pi \;=\; \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & 0 & 0 & \frac{3}{4} \end{pmatrix}$$



2) Dobbiamo calcolare $\pi_{41}^{(2)}$. A partire dal grafo orientato, abbiamo che

$$\pi_{41}^{(2)} \;=\; \underbrace{\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{4}}_{\text{prob. cammino } 4\to4\to1} \;=\; \frac{3}{16} \;\approx\; 18.75\%.$$

3) Determiniamo innanzitutto la densità discreta della variabile aleatoria X_2. Sappiamo che $X_0 = 1$, quindi

X_0	1	2	3	4
p_{X_0}	1	0	0	0

Inoltre, sappiamo che

$$\mathbb{P}(X_2 = j) \;=\; \sum_{i=1,2,3,4} p_{X_0}(i)\,\pi_{ij}^{(2)} \;=\; \pi_{1j}^{(2)}, \qquad \forall\, j = 1, 2, 3, 4.$$

Abbiamo che

$$\pi_{11}^{(2)} \;=\; \underbrace{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}}_{\text{prob. cammino } 1\to2\to1} \;+\; \underbrace{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}}_{\text{prob. cammino } 1\to4\to1} \;=\; \frac{3}{8},$$

$$\pi_{12}^{(2)} \;=\; 0,$$

$$\pi_{13}^{(2)} \;=\; \underbrace{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}}_{\text{prob. cammino } 1\to2\to3} \;=\; \frac{1}{4},$$

$$\pi_{14}^{(2)} \;=\; \underbrace{\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}}_{\text{prob. cammino } 1\to4\to4} \;=\; \frac{3}{8}.$$

Quindi

X_2	1	2	3	4
p_{X_2}	$\frac{3}{8}$	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{8}$

In conclusione, abbiamo che

$$\mathbb{E}[X_2] \;=\; 1\cdot\frac{3}{8} + 2\cdot 0 + 3\cdot\frac{1}{4} + 4\cdot\frac{3}{8} \;=\; \frac{21}{8} \;=\; 2.625.$$

4) Dalla formula di Bayes, si ha che

$$\mathbb{P}(X_1 = 2|X_2 = 1) \; = \; \frac{\mathbb{P}(X_2 = 1|X_1 = 2)\,\mathbb{P}(X_1 = 2)}{\mathbb{P}(X_2 = 1)} \; = \; \frac{\pi_{21} \cdot p_{X_1}(2)}{p_{X_2}(1)}.$$

Notiamo che

$$p_{X_1}(2) \; = \; \mathbb{P}(X_1 = 2) \; = \; \sum_{i=1,2,3,4} p_{X_0}(i)\,\pi_{i2} \; = \; \pi_{12} \; = \; \frac{1}{2}.$$

Quindi, dato che $p_{X_2}(1) = 3/8$ per quanto visto al punto precedente,

$$\mathbb{P}(X_1 = 2|X_2 = 1) \; = \; \frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}}{\frac{3}{8}} \; = \; \frac{2}{3}.$$