# Calcolo delle Probabilità e Statistica 2021/2022

## Scheda di esercizi 6 - Vettori aleatori discreti

**Esercizio 1**. Siano $X$ e $Y$ due variabili aleatorie discrete con densità discreta congiunta parzialmente data da:

| $X \backslash Y$ | 0 | 1 | 2 | $p_X$ |
|---|---|---|---|---|
| 2 | | 0.1 | | |
| 4 | 0.1 | | | 0.6 |
| $p_Y$ | 0.3 | 0.4 | | 1 |

(a) Completare la tabella.

(b) $X$ ed $Y$ sono indipendenti?

(c) Calcolare $\mathbb{P}(XY \leq 3)$.

**Esercizio 2**. Sia $X$ una variabile aleatoria discreta con legge uniforme sull'insieme $\{-1, 1\}$, quindi $X \sim Unif(\{-1, 1\})$.

(a) Determinare la densità discreta di $X$.

Sia ora $Y$ un'altra variabile aleatoria discreta, indipendente da $X$, ma con la stessa legge di $X$. Sia inoltre $Z = XY$.

(b) Trovare la densità discreta congiunta di $X$ e $Z$ e le densità marginali.

(c) $X$ e $Z$ sono indipendenti?

**Esercizio 3**. Un dispositivo elettronico genera una coppia di numeri casuali $X_1$ e $X_2$ con densità discreta congiunta

| $X_1 \backslash X_2$ | $-1$ | $0$ | $1$ |
|---|---|---|---|
| $-1$ | $\frac{p^2}{2}$ | $\frac{2p(1-p)}{5}$ | $\frac{(1-p)^2}{2}$ |
| $0$ | $\frac{2p(1-p)}{5}$ | $\frac{2p(1-p)}{5}$ | $\frac{2p(1-p)}{5}$ |
| $1$ | $\frac{(1-p)^2}{2}$ | $\frac{2p(1-p)}{5}$ | $\frac{p^2}{2}$ |

dove il parametro $p$ può essere regolato a piacere.

(a) Determinare i valori ammissibili per il parametro $p$.

Un secondo dispositivo elettronico elabora i numeri casuali $X_1$ e $X_2$ per ottenerne il prodotto $M$.

(b) Calcolare valore atteso e varianza di $M$.

(c) Determinare la densità discreta di $M$.

**Esercizio 4**. Un perito elettrotecnico deve costruire un sistema costituito da tre componenti in serie. Egli pesca i tre componenti da una scatola in cui vi sono tre componenti *nuovi*, due *usati ma funzionanti* e due *difettosi*. Siano

$X$ = "numero di componenti *nuovi* pescati dalla scatola",
$Y$ = "numero di componenti *usati ma funzionanti* pescati dalla scatola".

(a) Determinare la densità discreta congiunta di $X$ ed $Y$ e le densità marginali.

(b) Le variabili $X$ ed $Y$ sono indipendenti?

(c) Calcolare $\mathbb{E}[X]$, $\mathbb{E}[Y]$, $\mathrm{Var}(X)$, $\mathrm{Var}(Y)$, $\mathbb{E}[XY]$, $\mathrm{Cov}(X,Y)$.

(d) Calcolare la densità discreta, il valore atteso e la varianza del numero di componenti pescati funzionanti.

(e) Calcolare la probabilità che l'apparecchio funzioni.

**Esercizio 5**. Sia $D$ il risultato del lancio di un dado a tre facce. Sulla base del risultato si lancino $D$ monete. Sia $T$ il numero di teste così ottenuto.

(a) Trovare la densità discreta congiunta di $D$ e $T$ e le densità marginali.

(b) Qual è il valore atteso di $T$?

**Esercizio 6***. Siano $X$ e $Y$ variabili aleatorie discrete con $\mathrm{Var}(X) > 0$ e $\mathrm{Var}(Y) > 0$. Indichiamo $\mathbb{E}[X]$ e $\mathbb{E}[Y]$ rispettivamente con $\mu_X$ e $\mu_Y$. Analogamente, indichiamo $\mathrm{Var}(X)$ e $\mathrm{Var}(Y)$ rispettivamente con $\sigma_X^2$ e $\sigma_Y^2$. Sia infine $\rho_{X,Y}$ il coefficiente di correlazione, dato da

$$\rho_{X,Y} \;=\; \frac{\mathrm{Cov}(X,Y)}{\sigma_X \sigma_Y}.$$

Si mostri che

$$\rho_{X,Y} \;=\; \pm 1 \qquad \Longleftrightarrow \qquad Y \;=\; aX + b, \;\text{ per qualche } a \neq 0 \text{ e } b \in \mathbb{R}.$$

**Esercizio 7**. Un dado a quattro facce viene lanciato due volte. Si considerino le variabili aleatorie

$$\begin{aligned} X &= \text{“prodotto dei valori apparsi nei due lanci”} \\ Y &= \text{“valore massimo che appare nei due lanci”} \end{aligned}$$

Determinare congiunta e marginali di $X$ e $Y$.

**Esercizio 8**. Si lancia un dado a quattro facce. Sia $X$ la variabile aleatoria che indica il risultato del lancio del dado. Dopo aver lanciato il dado, si estrae una pallina da un'urna contenente $X$ palline numerate da 1 a $X$. Sia

$$Y \;=\; \text{“n}^{\text{o}}\text{ della pallina estratta”}.$$

Determinare congiunta e marginali di $X$ e $Y$.

**Esercizio 9**. Un dado a tre facce viene lanciato due volte. Siano $X$ e $Y$ i risultati ottenuti nei due lanci.

a) Determinare la funzione di distribuzione congiunta e le marginali di $X$ e $Y$.

Si considerino le variabili aleatorie $U = XY$ e $V = |X - Y|$.

b) Determinare la funzione di distribuzione congiunta e le marginali di $U$ e $V$.

c) Dire se $U$ e $V$ sono indipendenti.

d) Calcolare $\mathbb{P}(|U - V| \leq 1)$.

**Esercizio 1.**

(a)

| $X \backslash Y$ | 0 | 1 | 2 | $p_X$ |
|---|---|---|---|---|
| 2 | 0.2 | 0.1 | 0.1 | 0.4 |
| 4 | 0.1 | 0.3 | 0.2 | 0.6 |
| $p_Y$ | 0.3 | 0.4 | 0.3 | 1 |

(b) $X$ ed $Y$ non sono indipendenti, infatti, ad esempio, $p_{(X,Y)}(2,0) \neq p_X(2)p_Y(0)$.

(c)

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(XY \leq 3) &= \sum_{(x_i,y_j)\,:\, x_i y_j \leq 3} p_{(X,Y)}(x_i,y_j) \\ &= p_{(X,Y)}(2,0) + p_{(X,Y)}(2,1) + p_{(X,Y)}(4,0) \;=\; 0.4.\end{aligned}$$

**Esercizio 2.**

(a)

| $X$ | $-1$ | 1 |
|---|---|---|
| $p_X$ | $1/2$ | $1/2$ |

(b)

| $X \backslash Z$ | $-1$ | 1 | $p_X$ |
|---|---|---|---|
| $-1$ | $1/4$ | $1/4$ | $1/2$ |
| 1 | $1/4$ | $1/4$ | $1/2$ |
| $p_Z$ | $1/2$ | $1/2$ | 1 |

(c) Sì

**Esercizio 3.**

(a) Il risultato è $0 \leq p \leq 1$. Infatti, affinché $p_{(X_1,X_2)}$ sia effettivamente una densità discreta, devono valere le seguenti condizioni:

- $0 \leq p_{(X_1,X_2)}(i,j) \leq 1$, per ogni $i,j = -1,0,1$;
- $\sum_{i,j} p_{(X_1,X_2)}(i,j) = 1$.

In altri termini, deve valere che

$$\begin{cases} 0 \;\leq\; \frac{p^2}{2} \;\leq\; 1 \\ 0 \;\leq\; \frac{2p(1-p)}{5} \;\leq\; 1 \\ 0 \;\leq\; \frac{(1-p)^2}{2} \;\leq\; 1 \\ p^2 + 2p(1-p) + (1-p)^2 \;=\; 1 \end{cases}$$

L'uguaglianza vale sempre, qualunque sia il valore del parametro $p$. Le disuguaglianze sono tutte simultaneamente verificate se e solo se $0 \leq p \leq 1$.

(b) Dato che $M$ è una funzione di $X_1$ e $X_2$, infatti $M = X_1X_2$, possiamo calcolare valore atteso e varianza tramite le seguenti formule:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[M] &= \sum_{i,j=-1,0,1} i\,j\,p_{(X_1,X_2)}(i,j), \\ \mathrm{Var}(M) &= \sum_{i,j=-1,0,1} i^2\,j^2\,p_{(X_1,X_2)}(i,j) - (\mathbb{E}[M])^2.\end{aligned}$$

Otteniamo $\mathbb{E}[M] = 2p-1$ e $\mathrm{Var}(M) = 2p(1-p)$.

(c)

| $M$ | $-1$ | $0$ | $1$ |
|---|---|---|---|
| $p_M$ | $(1-p)^2$ | $2p(1-p)$ | $p^2$ |

**Esercizio 4.**

(a) Si ha che $\mathcal{S}_X = \{0,1,2,3\}$ e $\mathcal{S}_Y = \{0,1,2\}$. Inoltre, per ogni $(x_i, y_j) \in \mathcal{S}_X \times \mathcal{S}_Y$, vale che

$$p_{(X,Y)}(x_i, y_j) \;=\; \begin{cases} \dfrac{\binom{3}{x_i}\binom{2}{y_j}\binom{2}{3-(x_i+y_j)}}{\binom{7}{3}}, & \text{se } x_i + y_j = 1,2,3, \\[2ex] 0, & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Quindi

| $X \backslash Y$ | 0 | 1 | 2 | $p_X$ |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 2/35 | 2/35 | 4/35 |
| 1 | 3/35 | 12/35 | 3/35 | 18/35 |
| 2 | 6/35 | 6/35 | 0 | 12/35 |
| 3 | 1/35 | 0 | 0 | 1/35 |
| $p_Y$ | 10/35 | 20/35 | 5/35 | 1 |

(b) No, infatti, ad esempio, $p_{(X,Y)}(0,0) \neq p_X(0)p_Y(0)$.

(c) $\mathbb{E}[X] = 45/35$, $\mathbb{E}[Y] = 30/35$, $\mathrm{Var}(X) = 24/49$, $\mathrm{Var}(Y) = 20/49$, $\mathbb{E}[XY] = 30/35$, $\mathrm{Cov}(X,Y) = -12/49$.

(d) Sia

$$Z \;=\; \text{“numero di componenti funzionanti pescati dalla scatola”}.$$

Allora $Z = X + Y$. Inoltre $Z$ è una v.a. discreta, infatti il suo supporto è un insieme finito ed è dato da $\mathcal{S}_Z = \{1,2,3\}$.

| $Z$ | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|
| $p_Z$ | 1/7 | 4/7 | 2/7 |

Infine

$$\mathbb{E}[Z] \;=\; \mathbb{E}[X+Y] \;=\; \mathbb{E}[X] + \mathbb{E}[Y] \;=\; \frac{75}{35},$$

$$\mathrm{Var}(Z) \;=\; \mathrm{Var}(X+Y) \;=\; \mathrm{Var}(X) + \mathrm{Var}(Y) + 2\,\mathrm{Cov}(X,Y) \;=\; \frac{20}{49}.$$

(e) $\mathbb{P}(Z = 3) = p_Z(3) = 2/7$.

**Esercizio 5.**

(a) Si noti che per determinare $p_{(D,T)}(n,k) = \mathbb{P}(\{D = n\} \cap \{T = k\})$, conviene utilizzare la regola della catena:

$$\mathbb{P}(\{D = n\} \cap \{T = k\}) \;=\; \mathbb{P}(T = k | D = n)\,\mathbb{P}(D = n).$$

Si noti inoltre che $p_D(n) = \mathbb{P}(D = n) = 1/3$, per ogni $n = 1,2,3$; mentre $\mathbb{P}(T = k|D = n)$ è la probabilità di ottenere $k$ teste sapendo di aver lanciato $n$ monete, ovvero di ottenere $k$ successi in $n$ prove di Bernoulli tutte con probabilità di successo $p = 1/2$, quindi

$$\mathbb{P}(T = k|D = n) \;=\; \binom{n}{k}\frac{1}{2^n}.$$

| $D \backslash T$ | 0 | 1 | 2 | 3 | $p_D$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | $\frac{1}{2}\frac{1}{3} = \frac{1}{6}$ | $\frac{1}{2}\frac{1}{3} = \frac{1}{6}$ | 0 | 0 | $\frac{1}{3}$ |
| 2 | $\frac{1}{4}\frac{1}{3} = \frac{1}{12}$ | $\frac{1}{2}\frac{1}{3} = \frac{1}{6}$ | $\frac{1}{4}\frac{1}{3} = \frac{1}{12}$ | 0 | $\frac{1}{3}$ |
| 3 | $\frac{1}{8}\frac{1}{3} = \frac{1}{24}$ | $\frac{3}{8}\frac{1}{3} = \frac{1}{8}$ | $\frac{3}{8}\frac{1}{3} = \frac{1}{8}$ | $\frac{1}{8}\frac{1}{3} = \frac{1}{24}$ | $\frac{1}{3}$ |
| $p_T$ | $\frac{7}{24}$ | $\frac{11}{24}$ | $\frac{5}{24}$ | $\frac{1}{24}$ | 1 |

(b) $\mathbb{E}[T] = 1$.

**Esercizio 6***. Dimostriamo che

$$\rho_{X,Y} \;=\; \pm 1 \qquad \Longleftrightarrow \qquad Y \;=\; \frac{\rho_{X,Y}\sigma_Y}{\sigma_X}X + \frac{\mu_Y\sigma_X - \rho_{X,Y}\sigma_Y\mu_X}{\sigma_X},$$

da cui segue il risultato richiesto con $a = \frac{\rho_{X,Y}\sigma_Y}{\sigma_X}$ e $b = \frac{\mu_Y\sigma_X - \rho_{X,Y}\sigma_Y\mu_X}{\sigma_X}$. A tale scopo, è sufficiente mostrare che la variabile aleatoria

$$Z \;=\; \frac{1}{\sigma_Y}Y - \frac{\rho_{X,Y}}{\sigma_X}X$$

è costante. Infatti se $Z$ è costante allora necessariamente coincide con il suo valore atteso, ovvero

$$Z \;=\; \mathbb{E}[Z] \;=\; \mathbb{E}\bigg[\frac{1}{\sigma_Y}Y - \frac{\rho_{X,Y}}{\sigma_X}X\bigg] \;=\; \frac{1}{\sigma_Y}\mathbb{E}[Y] - \frac{\rho_{X,Y}}{\sigma_X}\mathbb{E}[X] \;=\; \frac{1}{\sigma_Y}\mu_Y - \frac{\rho_{X,Y}}{\sigma_X}\mu_X.$$

Quindi, in conclusione, vale che

$$\frac{1}{\sigma_Y}Y - \frac{\rho_{X,Y}}{\sigma_X}X \;=\; \frac{1}{\sigma_Y}\mu_Y - \frac{\rho_{X,Y}}{\sigma_X}\mu_X.$$

Resta dunque da dimostrare che $Z$ è costante. Ricordiamo che una variabile aleatoria è costante se e solo se ha varianza nulla. Calcoliamo dunque la varianza della variabile aleatoria $Z$ e verifichiamo che è uguale a zero. Si ottiene

$$\begin{aligned}\mathrm{Var}\bigg(\frac{1}{\sigma_Y}Y - \frac{\rho_{X,Y}}{\sigma_X}X\bigg) \;&=\; \mathrm{Var}\bigg(\frac{1}{\sigma_Y}Y\bigg) + \mathrm{Var}\bigg(-\frac{\rho_{X,Y}}{\sigma_X}X\bigg) + 2\,\mathrm{Cov}\bigg(\frac{1}{\sigma_Y}Y, -\frac{\rho_{X,Y}}{\sigma_X}X\bigg) \\ &=\; \frac{1}{\sigma_Y^2}\,\mathrm{Var}(Y) + \frac{\rho_{X,Y}^2}{\sigma_X^2}\,\mathrm{Var}(X) - 2\frac{\rho_{X,Y}}{\sigma_X\sigma_Y}\,\mathrm{Cov}(Y,X) \;=\; 1 - \rho_{X,Y}^2 \;=\; 0,\end{aligned}$$

dove l'ultima uguaglianza, ovvero $1 - \rho_{X,Y}^2 = 0$, vale se e solo se $\rho_{X,Y} = \pm 1$.

**Esercizio 7**.

| $X \backslash Y$ | 1 | 2 | 3 | 4 | $p_X$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | $\frac{1}{16}$ | 0 | 0 | 0 | $\frac{1}{16}$ |
| 2 | 0 | $\frac{1}{8}$ | 0 | 0 | $\frac{1}{8}$ |
| 3 | 0 | 0 | $\frac{1}{8}$ | 0 | $\frac{1}{8}$ |
| 4 | 0 | $\frac{1}{16}$ | 0 | $\frac{1}{8}$ | $\frac{3}{16}$ |
| 6 | 0 | 0 | $\frac{1}{8}$ | 0 | $\frac{1}{8}$ |
| 8 | 0 | 0 | 0 | $\frac{1}{8}$ | $\frac{1}{8}$ |
| 9 | 0 | 0 | $\frac{1}{16}$ | 0 | $\frac{1}{16}$ |
| 12 | 0 | 0 | 0 | $\frac{1}{8}$ | $\frac{1}{8}$ |
| 16 | 0 | 0 | 0 | $\frac{1}{16}$ | $\frac{1}{16}$ |
| $p_Y$ | $\frac{1}{16}$ | $\frac{3}{16}$ | $\frac{5}{16}$ | $\frac{7}{16}$ | 1 |

**Esercizio 8**.

| $X \backslash Y$ | 1 | 2 | 3 | 4 | $p_X$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | $\frac{1}{4}$ | 0 | 0 | 0 | $\frac{1}{4}$ |
| 2 | $\frac{1}{8}$ | $\frac{1}{8}$ | 0 | 0 | $\frac{1}{4}$ |
| 3 | $\frac{1}{12}$ | $\frac{1}{12}$ | $\frac{1}{12}$ | 0 | $\frac{1}{4}$ |
| 4 | $\frac{1}{16}$ | $\frac{1}{16}$ | $\frac{1}{16}$ | $\frac{1}{16}$ | $\frac{1}{4}$ |
| $p_Y$ | $\frac{25}{48}$ | $\frac{13}{48}$ | $\frac{7}{48}$ | $\frac{1}{16}$ | 1 |

**Esercizio 9**.

a)

| $X \backslash Y$ | 1 | 2 | 3 | $p_X$ |
|---|---|---|---|---|
| 1 | $\frac{1}{9}$ | $\frac{1}{9}$ | $\frac{1}{9}$ | $\frac{1}{3}$ |
| 2 | $\frac{1}{9}$ | $\frac{1}{9}$ | $\frac{1}{9}$ | $\frac{1}{9}$ |
| 3 | $\frac{1}{9}$ | $\frac{1}{9}$ | $\frac{1}{9}$ | $\frac{1}{3}$ |
| $p_Y$ | $\frac{1}{3}$ | $\frac{1}{3}$ | $\frac{1}{3}$ | 1 |

b) Si ha che

$$
\begin{array}{lrcllrcl}
\text{se} & (X,Y) & = & (1,1) & \text{allora} & (U,V) & = & (1,0),\\
\text{se} & (X,Y) & = & (1,2) & \text{allora} & (U,V) & = & (2,1),\\
\text{se} & (X,Y) & = & (1,3) & \text{allora} & (U,V) & = & (3,2),\\
\text{se} & (X,Y) & = & (2,1) & \text{allora} & (U,V) & = & (2,1),\\
\text{se} & (X,Y) & = & (2,2) & \text{allora} & (U,V) & = & (4,0),\\
\text{se} & (X,Y) & = & (2,3) & \text{allora} & (U,V) & = & (6,1),\\
\text{se} & (X,Y) & = & (3,1) & \text{allora} & (U,V) & = & (3,2),\\
\text{se} & (X,Y) & = & (3,2) & \text{allora} & (U,V) & = & (6,1),\\
\text{se} & (X,Y) & = & (3,3) & \text{allora} & (U,V) & = & (9,0).
\end{array}
$$

Quindi

| $U \backslash V$ | 0 | 1 | 2 | $p_U$ |
|---|---|---|---|---|
| 1 | $\frac{1}{9}$ | 0 | 0 | $\frac{1}{9}$ |
| 2 | 0 | $\frac{2}{9}$ | 0 | $\frac{2}{9}$ |
| 3 | 0 | 0 | $\frac{2}{9}$ | $\frac{2}{9}$ |
| 4 | $\frac{1}{9}$ | 0 | 0 | $\frac{1}{9}$ |
| 6 | 0 | $\frac{2}{9}$ | 0 | $\frac{2}{9}$ |
| 9 | $\frac{1}{9}$ | 0 | 0 | $\frac{1}{9}$ |
| $p_V$ | $\frac{1}{3}$ | $\frac{4}{9}$ | $\frac{2}{9}$ | 1 |

c) No, infatti ad esempio $p_{(U,V)}(1,0) \neq p_U(1)\, p_V(0)$.

d) Abbiamo che

$$
\begin{aligned}
\mathbb{P}(|U-V| \leq 1) &= \sum_{i,j:\ |u_i - v_j| \leq 1} p_{(U,V)}(u_i, v_j)\\
&= p_{(U,V)}(1,0) + p_{(U,V)}(1,2) + p_{(U,V)}(2,1) + p_{(U,V)}(3,2) \;=\; \frac{5}{9}.
\end{aligned}
$$