Calcolo delle Probabilità e Statistica 2021/2022

Scheda di esercizi 5 - Variabili aleatorie continue

Esercizio 1. Il raggio R di un certo tipo di particella inquinante, espresso in micron, è una variabile aleatoria continua con densità

$$f_R(x) \;=\; \begin{cases} c\,x\,\mathrm{e}^{-x^2}, & \text{per } x > 0, \\ 0, & \text{per } x \le 0. \end{cases}$$

(a) Trovare il valore della costante c.

(b) Determinare la funzione di ripartizione di R.

(c) Calcolare la media di R. $\left[\text{Si usi che } \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\right]$

(d) Calcolare la probabilità che una particella abbia un raggio superiore a 2 micron.

Sia ora X la variabile aleatoria che vale 1 se $R < 2$ e 0 altrimenti.

(e) Mostrare che X è una variabile aleatoria discreta. Determinarne supporto e densità discreta.

Esercizio 2. Sia X una v.a.c. con densità

$$f_X(x) \;=\; \begin{cases} 0, & |x| \ge 1, \\ 1/4, & -1 < x < 0, \\ a\,(1 - x^3), & 0 \le x < 1, \end{cases}$$

(a) Si trovi il valore del parametro a.

(b) Calcolare le seguenti quantità:

$$\mathbb{P}(X \le 1/2), \qquad \mathbb{P}(-1/4 \le X \le 1/4), \qquad \mathbb{P}(X = 0), \qquad \mathbb{P}(X \le 3), \qquad \mathbb{E}[X], \qquad \mathrm{Var}(X).$$

(c) Determinare la funzione di ripartizione di X.

Esercizio 3. Sia X una variabile aleatoria continua con funzione di ripartizione

$$F_X(x) \;=\; \begin{cases} 0, & x < 0, \\ (1 - \mathrm{e}^{-x})^2, & x \ge 0. \end{cases}$$

Determinare:

(a) la densità di X,

(b) $\mathbb{P}(X > 1)$,

(c) $\mathbb{P}(1 < X < 2)$.

Esercizio 4. Sia X una variabile aleatoria continua con funzione di ripartizione

$$F_X(x) \;=\; \begin{cases} 0, & x < 1, \\ 1 - \mathrm{e}^{1-x}, & x \ge 1. \end{cases}$$

(a) Determinare la densità di X.

(b) Calcolare media e varianza di X.

(c) Qual è la densità continua della variabile aleatoria $Y = \mathrm{e}^X$?

Esercizio 5. Sia X una variabile aleatoria continua con densità

$$f_X(x) \;=\; \begin{cases} \frac{2x}{\lambda}\,\mathrm{e}^{-x^2/\lambda}, & \text{per } x > 0, \\ 0, & \text{per } x \leq 0. \end{cases}$$

Determinare i possibili valori di λ.

Esercizio 6. Si consideri una v.a.c. X con densità

$$f_X(x) \;=\; \begin{cases} \lambda\,\mathrm{e}^{-(x-\lambda)}, & x > \lambda, \\ 0, & x \leq \lambda. \end{cases}$$

(a) Determinare λ.

(b) Calcolare la funzione di ripartizione di X.

(c) Si calcoli $\mathbb{P}(X > 3)$ e $\mathbb{P}(X^3 > 27)$.

(d) Si calcoli la media di $3X^2 - 1$.

Esercizio 7. Sia X una v.a.c. con densità

$$f_X(x) \;=\; \begin{cases} \frac{3}{2}x^2, & -k < x < k, \\ 0, & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

(a) Si trovi il valore del parametro k.

(b) Determinare la funzione di ripartizione di X.

(c) Calcolare media e varianza di X.

Esercizio 8. Sia X la variabile aleatoria che misura il tempo di vita di una lampadina ad incandescenza (in ore). Supponiamo che X abbia legge esponenziale di parametro $\lambda = 0.001$ ($X \sim \mathrm{Exp}\,(0.001)$), ovvero X è una v.a.c. con densità

$$f_X(x) \;=\; \begin{cases} 0, & x < 0, \\ 0.001\,\mathrm{e}^{-0.001\,x}, & x \geq 0. \end{cases}$$

(a) Calcolare la probabilità che una lampadina acquistata a inizio marzo non debba essere cambiata per tutto il mese.

(b) Si sa che le lampadine alogene, invece, hanno un tempo di vita $Y = 5X$. Determinare la densità continua di Y.

(c) Il tempo di vita di un nuovo tipo di lampadina è $Z = \mathrm{e}^{X/2500}$. Qual è la densità continua di Z?

Esercizio 9. Un'industria produce su commissione delle sbarre d'acciaio cilindriche, il cui diametro dovrebbe essere di 4 cm, ma che tuttavia sono accettabili se hanno diametro compreso fra 3.95 cm e 4.05 cm. Supponiamo che X sia variabile aleatoria normale X ($X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$), ovvero che X sia una v.a.c. con densità

$$f_X(x) \;=\; \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\frac{(x-\mu)^2}{\sigma^2}}, \qquad \text{per ogni } x \in \mathbb{R}.$$

(a) Sapendo che X ha media 4 e varianza 0.09, determinare la probabilità che il diametro sia accettabile. [Si esprima il risultato nella forma $\Phi(x) - \Phi(-x)$, per qualche $x > 0$]

(b) Sapendo che X ha media 4 e varianza 0.09, determinare la probabilità che il diametro sia inferiore a 4.

(c) Supponiamo ora di non conoscere μ e σ, ma di sapere, da un controllo accurato, che il 5% delle sbarre ha diametro inferiore al minimo tollerato, mentre il 12% superiore al massimo tollerato. Determinare media e deviazione standard di X. [Si usi che $\Phi^{-1}(0.05) \simeq -1.645$ e $\Phi^{-1}(0.88) \simeq 1.175$, dove Φ^{-1} denota la funzione inversa di Φ]

Esercizio 1.

(a) 2

(b) $F_R(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ 1 - \mathrm{e}^{-x^2}, & x \geq 0. \end{cases}$

(c) $\mathbb{E}[R] = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \simeq 0.8862$.

(d) $\mathbb{P}(R > 2) = 1 - F_R(2) \simeq 0.0183$.

(e) X è una v.a.d. con $\mathcal{S}_X = \{0, 1\}$ e

X	0	1
p_X	$1-p$	p

dove $p = \mathbb{P}(R < 2) = \mathbb{P}(R \leq 2) = 1 - \mathbb{P}(R > 2) \simeq 1 - 0.0183 = 0.9817$. Quindi X ha distribuzione di Bernoulli di parametro $p \simeq 0.9817$, cioè $X \sim B(0.9817)$.

Esercizio 2.

(a) Notiamo che $f_X(x) \geq 0$ per ogni x se e solo se $a \geq 0$. Inoltre

$$1 \;=\; \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)\,\mathrm{d}x \;=\; \int_{-1}^{0} \frac{1}{4}\,\mathrm{d}x + a\int_0^1 (1 - x^3)\,\mathrm{d}x,$$

da cui si ottiene $a = 1$.

(b)

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X \leq \tfrac{1}{2}) \;&=\; \int_{-\infty}^{1/2} f_X(x)\,\mathrm{d}x \;=\; \int_{-1}^{0} \frac{1}{4}\,\mathrm{d}x + \int_0^{1/2} (1 - x^3)\,\mathrm{d}x \;=\; \frac{1}{4} + \frac{1}{2} - \frac{1}{64} \;=\; \frac{47}{64}, \\
\mathbb{P}(-\tfrac{1}{4} \leq X \leq \tfrac{1}{4}) \;&=\; \frac{319}{1024}, \\
\mathbb{P}(X = 0) \;&=\; 0, \\
\mathbb{P}(X \leq 3) \;&=\; 1.
\end{aligned}$$

Inoltre

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[X] \;&=\; \int_{-\infty}^{+\infty} x f_X(x)\,\mathrm{d}x \;=\; \int_{-1}^{0} \frac{x}{4}\,\mathrm{d}x + \int_0^1 x(1 - x^3)\,\mathrm{d}x \;=\; \frac{7}{40}, \\
\mathbb{E}[X^2] \;&=\; \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)\,\mathrm{d}x \;=\; \int_{-1}^{0} \frac{x^2}{4} dx + \int_0^1 x^2(1 - x^3)\,\mathrm{d}x \;=\; \frac{3}{12},
\end{aligned}$$

quindi

$$\mathrm{Var}(X) \;=\; \mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}[X]^2 \;=\; \frac{3}{12} - \left(\frac{7}{40}\right)^2 \;\simeq\; 0.2194.$$

(c)

$$F_X(t) \;=\; \int_{-\infty}^{t} f_X(x)\,\mathrm{d}x \;=\; \begin{cases} 0, & t < -1, \\ t/4 + 1/4, & -1 \leq t < 0, \\ 1/4 + t - t^4/4, & 0 \leq t < 1, \\ 1, & t \geq 1. \end{cases}$$

Esercizio 3.

(a) $f_X(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0, \\ 2(\mathrm{e}^{-x} - \mathrm{e}^{-2x}), & x > 0. \end{cases}$

(b) 0.6

(c) 0.348

Esercizio 4.

(a) $f_X(x) = \begin{cases} 0, & x < 1, \\ \mathrm{e}^{1-x}, & x \geq 1. \end{cases}$

(b)

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[X] &= \int_{-\infty}^{+\infty} x\, f_X(x)\,\mathrm{d}x \;=\; \int_1^{+\infty} x\,\mathrm{e}^{1-x}\,\mathrm{d}x \;=\; -\big[x\mathrm{e}^{1-x}\big]_1^{+\infty} + \int_1^{+\infty} \mathrm{e}^{1-x}\,\mathrm{d}x \\
&= 1 - \big[\mathrm{e}^{1-x}\big]_1^{+\infty} \;=\; 2,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[X^2] &= \int_{-\infty}^{+\infty} x^2\, f_X(x)\,\mathrm{d}x \;=\; \int_1^{+\infty} x^2\,\mathrm{e}^{1-x}\,\mathrm{d}x \\
&= -\big[x^2\mathrm{e}^{1-x}\big]_1^{+\infty} + \int_1^{+\infty} 2x\,\mathrm{e}^{1-x}\,\mathrm{d}x \;=\; 1 + 2\,\mathbb{E}[X] \;=\; 5,
\end{aligned}$$

$$\mathrm{Var}(X) \;=\; \mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}[X]^2 \;=\; 5 - 4 \;=\; 1.$$

(c)

$$f_Y(y) \;=\; \begin{cases} 0, & y \leq \mathrm{e}, \\ \frac{\mathrm{e}}{y^2}, & y > \mathrm{e}. \end{cases}$$

Esercizio 5. $\lambda > 0$

Esercizio 6.

(a) $\lambda = 1$

(b) $F_X(x) = \begin{cases} 0, & x < 1, \\ 1 - \mathrm{e}^{-(x-1)}, & x \geq 1. \end{cases}$

(c) e^{-2}

(d) 14

Esercizio 7

(a)

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)\,\mathrm{d}x \;=\; \int_{-k}^{+k} \frac{3}{2}x^2\,\mathrm{d}x \;=\; \left[\frac{1}{2}x^3\right]_{-k}^{+k} \;=\; k^3,$$

da cui si ottiene $k = 1$.

(b)

$$F_X(t) \;=\; \begin{cases} 0, & t < -1, \\ \dfrac{t^3+1}{2}, & -1 \le t < 1, \\ 1, & t \ge 1. \end{cases}$$

(c) $\mathbb{E}[X] = 0$ and $\mathrm{Var}(X) = \mathbb{E}[X^2] = 3/5$.

Esercizio 8.

(a) $\mathbb{P}(X > 744) = \int_{744}^{+\infty} 0.001\,\mathrm{e}^{-0.001\,x}\,\mathrm{d}x = \mathrm{e}^{-0.744} \simeq 0.4752$.

(b) $f_Y(y) = \begin{cases} 0, & y < 0, \\ 0.0002\,\mathrm{e}^{-0.0002\,y}, & y \ge 0. \end{cases}$

(c) $f_Z(z) = \begin{cases} 0, & z < 1, \\ 2.5\,z^{-3.5}, & z \ge 1. \end{cases}$

Esercizio 9.

(a) Il risultato è $\Phi(0.167) - \Phi(-0.167) \simeq 0.1326$. Infatti, si noti che "il diametro è accettabile" $=$ $\{3.95 \le X \le 4.05\}$. Si noti inoltre che la v.a.

$$Z \;=\; \frac{X-4}{0.3}$$

ha legge normale standard. Quindi

$$\mathbb{P}(3.95 \le X \le 4.05) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{standardizzazione}}}{=} \mathbb{P}\bigg(\frac{3.95-4}{0.3} \le \frac{X-4}{0.3} \le \frac{4.05-4}{0.3}\bigg)$$
$$= \; \mathbb{P}(-0.167 \le Z \le 0.167) \;=\; \Phi(0.167) - \Phi(-0.167) \;\simeq\; 0.1326.$$

(b) 1/2

(c) Sappiamo che

$$\mathbb{P}(X < 3.95) \;=\; 0.05, \qquad \mathbb{P}(X > 4.05) \;=\; 0.12.$$

Sappiamo inoltre che

$$Z \;=\; \frac{X-\mu}{\sigma}$$

ha legge normale standard. Quindi standardizzando possiamo riscrivere le due uguaglianze riportate sopra in termini di Z:

$$\mathbb{P}\left(Z < \frac{3.95-\mu}{\sigma}\right) \;=\; 0.05, \qquad \mathbb{P}\left(Z > \frac{4.05-\mu}{\sigma}\right) \;=\; 0.12.$$

Esprimiamo ora queste due uguaglianze in termini di Φ, la funzione di ripartizione di Z. Poiché

$$\Phi\bigg(\frac{3.95-\mu}{\sigma}\bigg) \;=\; \mathbb{P}\left(Z < \frac{3.95-\mu}{\sigma}\right), \qquad \Phi\bigg(\frac{4.05-\mu}{\sigma}\bigg) \;=\; 1 - \mathbb{P}\left(Z > \frac{4.05-\mu}{\sigma}\right),$$

abbiamo che

$$\Phi\bigg(\frac{3.95-\mu}{\sigma}\bigg) \;=\; 0.05, \qquad \Phi\bigg(\frac{4.05-\mu}{\sigma}\bigg) \;=\; 0.88.$$

Quindi

$$\frac{3.95-\mu}{\sigma} \;=\; \Phi^{-1}(0.05) \;\simeq\; -1.645, \qquad\qquad \frac{4.05-\mu}{\sigma} \;=\; \Phi^{-1}(0.88) \;\simeq\; 1.175.$$

Per cui, risolvendo il sistema lineare nelle incognite μ e σ:

$$\begin{cases} 3.95-\mu = -1.645\,\sigma \\ 4.05-\mu = 1.175\,\sigma \end{cases}$$

si ottiene $\mu = 4.0083$ e $\sigma = 0.0355$.