Calcolo delle Probabilità e Statistica 2021/2022

Scheda di esercizi 4 - Variabili aleatorie discrete

Esercizio 1. Sia X una v.a. con funzione di ripartizione

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ 1/2, & 0 \leq x < 1, \\ 3/4, & 1 \leq x < 4, \\ 1, & x \geq 4. \end{cases}$$

(a) X è una v.a. discreta?

(b) Determinare supporto e densità discreta di X.

(c) Calcolare $\mathbb{P}(X < 4)$, $\mathbb{P}(X \leq 3)$ e $\mathbb{P}(X = 1)$.

(d) Qual è il valore atteso di X?

Esercizio 2. Sia X una variabile aleatoria discreta con supporto $\mathcal{S}_X = \{0, 3, 7, 21\}$ e densità discreta data da

X	0	3	7	21
p_X	α	$\alpha/3$	$1/5$	$2/5$

Determinare il valore di α.

Esercizio 3. Sia X una variabile aleatoria discreta, con densità discreta data da

X	1	2	3	4	5	6	7
p_X	0.02	0.03	0.09	0.25	0.40	0.16	0.05

(a) Determinare supporto e funzione di ripartizione di X.

(b) Qual è la probabilità che X sia compresa tra 3 e 6, estremi esclusi?

(c) Calcolare valore atteso e deviazione standard di X.

Esercizio 4. Si consideri una v.a.d. X con funzione di ripartizione

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ 1/3, & 0 \leq x < 1, \\ 5/6, & 1 \leq x < 3, \\ 1, & x \geq 3. \end{cases}$$

(a) Determinare supporto e densità discreta p_X di X.

(b) Calcolare il valore atteso di X.

(c) Si consideri la variabile aleatoria $Y = \sqrt{X}$. Determinare supporto e densità discreta p_Y di Y.

(d) Calcolare il valore atteso di Y.

Esercizio 5. Si supponga di avere un mazzo di 5 chiavi diverse. Dovendo aprire una serratura (la cui chiave è nel mazzo), si provano a caso le 5 chiavi, mettendo da parte quelle già provate, fino a che non si è trovata la chiave giusta. Sia X il numero di chiavi che devo provare per aprire la serratura.

(a) Qual è la legge di X?

(b) Qual è il numero atteso di tentativi da fare?

(c) Quanto vale la probabilità di controllare almeno 4 chiavi?

(d) Sapendo che al primo tentativo non ho trovato la chiave giusta, con quale probabilità non la trovo neanche al secondo?

Esercizio 6. In una certa provincia montuosa si può supporre che il numero X di frane al mese sia una variabile aleatoria con legge di Poisson, ovvero

$$\mathbb{P}(X = k) \;=\; \mathrm{e}^{-\lambda}\,\frac{\lambda^k}{k!}, \qquad \text{per ogni } k = 0, 1, 2, \dots$$

di parametro $\lambda = 2.3$.

(a) Calcolare la probabilità che ci siano almeno due frane in un dato mese.

(b) Quanto deve valere il parametro λ affinché la probabilità che in un mese non ci siano frane sia superiore a $1/2$?

(c) Sapendo che c'è stata almeno una frana, qual è la probabilità che ci siano state esattamente due frane?

Esercizio 7. Data una variabile aleatoria X di Poisson, ovvero

$$\mathbb{P}(X = k) \;=\; \mathrm{e}^{-\lambda}\,\frac{\lambda^k}{k!}, \qquad \text{per ogni } k = 0, 1, 2, \dots$$

di parametro $\lambda = 3$, si considerino

$$Y = \min(3, X), \qquad\qquad W = \mathrm{e}^{X/3}.$$

Si mostri che Y e W sono variabili aleatorie discrete. Si trovino supporto e densità di entrambe.

Esercizio 8. Data una variabile aleatoria X con distribuzione geometrica modificata, ovvero

$$\mathbb{P}(X = k) \;=\; p\,(1-p)^{k-1}, \qquad \text{per ogni } k = 1, 2, \dots,$$

di parametro $p = 1/3$, si considerino

$$Y = \min(3, X), \qquad\qquad W = \mathrm{e}^{X/3}.$$

Si mostri che Y e W sono variabili aleatorie discrete. Si trovino supporto e densità di entrambe.

Esercizio 9. Nel gioco del lotto ad ogni estrazione settimanale 5 numeri vengono estratti simultaneamente da un'urna che contiene 90 palline numerate da 1 a 90. Fissato un numero, ad esempio il 67, sia p la probabilità che esca in una singola estrazione.

(a) Quanto vale p?

Si considerino ora più estrazioni settimanali e siano E_i gli eventi dati da

$$E_i \;=\; \text{“esce il 67 all'}i\text{-esima estrazione”}, \qquad \text{per ogni } i = 1, 2, \dots$$

Siano inoltre X_i le variabili aleatorie indicatrici date da

$$X_i \;=\; 1_{E_i}, \qquad \text{per ogni } i = 1, 2, \dots$$

(b) Qual è la legge di X_i?

Sia

$$Y \;=\; \text{“numero di volte in cui esce il 67 nelle prime 50 estrazioni”}.$$

Sapendo che Y ha legge binomiale di parametri $n = 50$ e p ($Y \sim B(50, p)$), ovvero

$$\mathbb{P}(Y = k) \;=\; \binom{50}{k} p^k \,(1-p)^{50-k}, \qquad \text{per ogni } k = 0, 1, 2, \ldots, 50,$$

(c) determinare la probabilità che esca 6 volte nelle prime 50 estrazioni?

Sia infine

$$Z \;=\; \text{“prima estrazione in cui esce il 67”}.$$

Sapendo che Z ha legge geometrica modificata di parametro p, ovvero

$$\mathbb{P}(Z = k) \;=\; p\,(1-p)^{k-1}, \qquad \text{per ogni } k = 1, 2, \ldots,$$

(d) determinare la probabilità che il 67 non esca nelle prime 2 estrazioni?

Esercizio 10. Un'urna contiene una pallina magenta ed una carminio. Una pallina viene estratta a caso. Se è carminio il gioco termina. Se è magenta la pallina viene rimessa nell'urna insieme ad un'altra magenta. Supponiamo che questa procedura venga ripetuta fino ad aver fatto 4 estrazioni o alla prima estrazione di una pallina carminio, se si presenta prima della quarta estrazione. Sia

$$X \;=\; \text{“numero di estrazioni effettuate”}.$$

(a) Determinare supporto e densità discreta di X.

(b) Qual è il valore atteso di X?

Esercizio 1.

(a) Sì, infatti F_X è una funzione costante a tratti.

(b) $\mathcal{S}_X = \{0, 1, 4\}$.

X	0	1	4
p_X	1/2	1/4	1/4

(c)

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X < 4) &= p_X(0) + p_X(1) = \frac{3}{4}, \\
\mathbb{P}(X \leq 3) &= F_X(3) = \frac{3}{4}, \\
\mathbb{P}(X = 1) &= p_X(1) = \frac{1}{4}.
\end{aligned}$$

(d) $\mathbb{E}[X] = 5/4 = 1.25$.

Esercizio 2. Si deve avere:

- $0 \leq p_X(x_i) \leq 1$, per ogni $x_i \in \mathcal{S}_X = \{0, 3, 7, 21\}$,
- $\sum_i p_X(x_i) = 1$.

Quindi

$$0 \leq \alpha \leq 1, \qquad 0 \leq \frac{\alpha}{3} \leq 1, \qquad \alpha + \frac{\alpha}{3} + \frac{1}{5} + \frac{2}{5} = 1,$$

da cui otteniamo $\alpha = 3/10$.

Esercizio 3.

(a) $\mathcal{S}_X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$.

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & x < 1, \\ 0.02, & 1 \leq x < 2, \\ 0.05, & 2 \leq x < 3, \\ 0.14, & 3 \leq x < 4, \\ 0.39, & 4 \leq x < 5, \\ 0.79, & 5 \leq x < 6, \\ 0.95, & 6 \leq x < 7, \\ 1, & x \geq 7. \end{cases}$$

(b) $\mathbb{P}(3 < X < 6) = p_X(4) + p_X(5) = 0.65$.

(c) $\mathbb{E}[X] = 4.66$ e $\sigma_X = \sqrt{\mathrm{Var}(X)} = \sqrt{\mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}[X]^2} = 1.20$, dato che $\mathbb{E}[X^2] = 23.16$.

Esercizio 4.

(a) $\mathcal{S}_X = \{0, 1, 3\}$.

X	0	1	3
p_X	1/3	1/2	1/6

(b) $\mathbb{E}[X] = 1$.

(c) $\mathcal{S}_Y = \{0, 1, \sqrt{3}\}$.

Y	0	1	$\sqrt{3}$
p_Y	$1/3$	$1/2$	$1/6$

(d) $\mathbb{E}[Y] = \mathbb{E}[\sqrt{X}] = 0.7887$.

Esercizio 5.

(a) $X \sim \mathrm{Unif}(\{1,2,3,4,5\})$ (distribuzione uniforme su $\{1,2,3,4,5\}$), ovvero

X	1	2	3	4	5
p_X	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$

(b) $\mathbb{E}[X] = 3$.

(c) $\mathbb{P}(X \geq 4) = p_X(4) + p_X(5) = 0.4$.

(d)

$$\mathbb{P}(X > 2 | X > 1) \;=\; \frac{\mathbb{P}(\{X > 2\} \cap \{X > 1\})}{\mathbb{P}(X > 1)} \;=\; \frac{\mathbb{P}(X > 2)}{\mathbb{P}(X > 1)} \;=\; \frac{3/5}{4/5} \;=\; 0.75.$$

Esercizio 6.

(a) $\mathbb{P}(X \geq 2) = 1 - \mathbb{P}(X < 2) = 1 - p_X(0) - p_X(1) \approx 0.6691$.

(b) $\mathbb{P}(X = 0) > 1/2 \quad \Longleftrightarrow \quad \lambda < \log 2 \approx 0.6931$.

(c)

$$\mathbb{P}(X = 2 | X \geq 1) \;=\; \frac{\mathbb{P}(\{X = 2\} \cap \{X \geq 1\})}{\mathbb{P}(X \geq 1)} \;=\; \frac{\mathbb{P}(X = 2)}{1 - \mathbb{P}(X = 0)} \;=\; \frac{p_X(2)}{1 - p_X(0)} \;\approx\; 0.2947.$$

Esercizio 7. Y e W sono v.a.d. dato che il loro supporto è rispettivamente finito (per quanto riguarda Y) e numerabile (per quanto riguarda Z). Più precisamente, $\mathcal{S}_Y = \{0,1,2,3\}$ e

Y	0	1	2	3
p_Y	e^{-3}	$3\,\mathrm{e}^{-3}$	$\frac{9}{2}\,\mathrm{e}^{-3}$	$1 - \mathrm{e}^{-3} - 3\,\mathrm{e}^{-3} - \frac{9}{2}\,\mathrm{e}^{-3}$

$\mathcal{S}_W = \{1, \mathrm{e}^{1/3}, \mathrm{e}^{2/3}, \mathrm{e}^{3/3}, \mathrm{e}^{4/3}, \ldots\}$ e

$$p_W\big(\mathrm{e}^{k/3}\big) \;=\; \mathrm{e}^{-3}\,\frac{3^k}{k!}, \qquad \text{per ogni } k \;=\; 0,1,2,\ldots$$

Esercizio 8. Y e W sono v.a.d. dato che il loro supporto è rispettivamente finito (per quanto riguarda Y) e numerabile (per quanto riguarda Z). Più precisamente, $\mathcal{S}_Y = \{1,2,3\}$ e

Y	1	2	3
p_Y	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{4}{9}$

$\mathcal{S}_W = \{\mathrm{e}^{1/3}, \mathrm{e}^{2/3}, \mathrm{e}^{3/3}, \mathrm{e}^{4/3}, \ldots\}$ e

$$p_W\big(\mathrm{e}^{k/3}\big) \;=\; p\,(1-p)^{k-1}, \qquad \text{per ogni } k \;=\; 1,2,\ldots$$

Esercizio 9.

(a) $p = \frac{\binom{89}{4}}{\binom{90}{5}} = \frac{1}{18}$.

(b) $X_i \sim B(1/18)$ (distribuzione di Bernoulli di parametro $p = 1/18$).

(c) $\mathbb{P}(Y = 6) = \binom{50}{6}\left(\frac{1}{18}\right)^6\left(\frac{17}{18}\right)^{44} \approx 0.0378$.

(d) $\mathbb{P}(Z > 2) = 1 - p_Z(1) - p_Z(2) = (1-p)^2 \approx 0.8920$.

Esercizio 10.

(a) $\mathcal{S}_X = \{1, 2, 3, 4\}$,

X	1	2	3	4
p_X	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{4}$

(b) $\mathbb{E}[X] = \frac{25}{12} \approx 2.0833$.