Calcolo delle Probabilità e Statistica 2021/2022

Scheda di esercizi 3 - Calcolo combinatorio

Esercizio 1. Trovate una 24h chiusa con combinazione di 6 cifre. Con quale probabilità riuscirete ad aprirla al primo tentativo? E se la combinazione fosse di 6 lettere scelte fra X, Y, Z e W?

Esercizio 2. Scommetto sui primi 5 classificati di una gara con 40 concorrenti, senza conoscerli. Qual è la probabilità di vincere? E se scommettessi sui nomi dei primi cinque, senza precisarne l'ordine?

Esercizio 3. Tre amici si danno appuntamento nel bar della piazza centrale della città senza sapere che ci sono quattro bar. Qual è la probabilità che scelgano lo stesso bar? Tre bar differenti?

Esercizio 4. Si calcoli la probabilità di ottenere 2 palline rosse estraendone 4 da un'urna che contiene 3 palline rosse e 7 bianche. Si confrontino i casi di estrazioni con reimmissione, senza reimmissione e simultanea.

Esercizio 5. Si estraggono (con reimmissione, senza reimmissione, simultaneamente) 7 palline da un'urna contenente 4 palline bianche e 8 rosse. Qual è la probabilità di estrarne esattamente 3 bianche?

Esercizio 6. Giocate 6 numeri al Superenalotto. Verranno estratti 6 numeri senza ripetizione dai primi 90 naturali, seguiti dall'estrazione di un 7° numero jolly, diverso quindi dai precedenti. Qual è la probabilità di fare 5+1 (indovinare 5 dei primi 6 numeri estratti e in più il numero jolly)?

Esercizio 7. Supponiamo di giocare a poker con un mazzo da 52 carte, identificate dal seme (cuori $\heartsuit$, quadri $\diamondsuit$, fiori $\clubsuit$, picche $\spadesuit$) e dal tipo (un numero da 2 a 10 oppure J, Q, K, A). Si calcolino:

(a) la probabilità di avere una scala reale massima, ovvero le 5 carte 10, J, Q, K, A dello stesso seme;

(b) la probabilità di avere una scala reale, ovvero una qualsiasi scala di 5 carte dello stesso seme (ricordiamo che con l'asso possiamo fare la scala A, 2, 3, 4, 5 ma anche 10, J, Q, K, A);

(c) la probabilità di avere una scala, ovvero una qualsiasi scala di 5 carte non necessariamente dello stesso seme;

(d) la probabilità di avere colore, ovvero un sottoinsieme di 5 carte dello stesso seme;

(e) la probabilità di avere poker, ovvero un sottoinsieme di 5 carte in cui ci sono 4 carte dello stesso tipo;

(f) la probabilità di avere un tris, ovvero un sottoinsieme di 5 carte in cui ci sono 3 carte dello stesso tipo e le altre due di tipo diverso tra loro e dalle prime tre;

(g) la probabilità di avere una coppia, ovvero un sottoinsieme di 5 carte in cui ci sono 2 carte dello stesso tipo e le altre tre di tipo diverso tra loro e dalle prime due.

Esercizio 8. Un mazzo di carte da scopone scientifico è costituito da 40 carte, identificate dal seme (spade, coppe, bastoni, denari) e dal tipo (asso, 2, 3, 4, 5, 6, 7, fante, cavallo, re). Supponendo di pescare 10 carte dal mazzo, calcolare la probabilità di estrarre:

(a) l'asso di bastoni,

(b) l'asso di spade e l'asso di coppe.

Esercizio 9. Si divida un mazzo di 40 carte in due mazzi da 20. Calcolare la probabilità dell'evento

$$A = \text{“il primo mazzo contiene esattamente un 7”}.$$

Esercizio 10 (Paradosso dei compleanni). Qual è la probabilità p_n che, in un gruppo di n persone selezionate in modo casuale (nate tutte in un anno non bisestile), almeno due di esse compiano gli anni lo stesso giorno? Quanto deve essere grande n affinché $p_n > \frac{1}{2}$?

Esercizio 11. Per compilare una colonna di una schedina del Totocalcio occorre scegliere, per ciascuna delle 13 partite, tra la vittoria della squadra di casa (1), il pareggio (X) o la vittoria della squadra in trasferta. Si calcoli la probabilità di fare 13 o 12 al Totocalcio giocando per ogni partita una doppia (due possibili risultati per ogni partita). Si suppongano equiprobabili le possibili schedine.

Esercizio 1. 10^{-6} e $4^{-6} = 0.00024$

Esercizio 2. $\dfrac{1}{40 \cdot 39 \cdot 38 \cdot 37 \cdot 36} \approx 1.3 \cdot 10^{-8}$; $\dfrac{5!}{40 \cdot 39 \cdot 38 \cdot 37 \cdot 36} = \frac{1}{\binom{40}{5}} \approx 1.5 \cdot 10^{-6}$

Esercizio 3. $\dfrac{4}{4^3} = 0.0625 = 6.25\%$ e $\dfrac{4 \cdot 3 \cdot 2}{4^3} = 0.375 = 37.5\%$

Esercizio 4.

- con reimmissione: $\dfrac{\binom{4}{2} \cdot 3 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 7}{10^4} = 0.2646 = 26.46\%$
- senza reimmissione: $\dfrac{\binom{4}{2} \cdot 3 \cdot 2 \cdot 7 \cdot 6}{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7} = \frac{3}{10} = 30\%$
- simultanea: $\dfrac{\binom{3}{2}\binom{7}{2}}{\binom{10}{4}} = \frac{3}{10} = 30\%$

Esercizio 5.

- con reimmissione: $\dfrac{\binom{7}{3} \cdot 4^3 \cdot 8^4}{12^7} = \frac{560}{2187} \approx 25.61\%$
- senza reimmissione: $\dfrac{\binom{7}{3} \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5}{12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6} = \frac{35}{99} = 0.\overline{35} \approx 35.35\%$
- simultanea: $\dfrac{\binom{4}{3}\binom{8}{4}}{\binom{12}{7}} = \frac{35}{99} = 0.\overline{35} \approx 35.35\%$

Esercizio 6. $\dfrac{6 \cdot 6! \cdot 84}{90 \cdot 89 \cdot 88 \cdot 87 \cdot 86 \cdot 85 \cdot 84} \approx 9.6 \cdot 10^{-9}$

Esercizio 7.

(a) $\dfrac{4}{\binom{52}{5}} = \dfrac{4}{2\,598\,960} \approx 1.54 \cdot 10^{-6}$;

(b) $\dfrac{40}{\binom{52}{5}} \approx 1.54 \cdot 10^{-5}$;

(c) $\dfrac{10\,240}{\binom{52}{5}} \approx 0.0039$;

(d) $\dfrac{5\,148}{\binom{52}{5}} \approx 0.00198$;

(e) $\dfrac{624}{\binom{52}{5}} \approx 0.00024$;

(f) $\dfrac{54\,912}{\binom{52}{5}} \approx 0.0211$;

(g) $\dfrac{1\,098\,240}{\binom{52}{5}} \approx 0.4226$.

Esercizio 8.

(a) $\dfrac{\binom{39}{9}}{\binom{40}{10}} = 25\%$,

(b) $\dfrac{\binom{38}{8}}{\binom{40}{10}} = \frac{3}{52} \approx 5.77\%$.

Esercizio 9. Possiamo considerare come spazio campionario l'insieme $\Omega = \mathbf{C}_{40,20}$. Un generico elemento di Ω è dunque un sottoinsieme di 20 carte pescate dal mazzo di 40 carte e corrisponde alle carte del primo mazzo da 20.
Determiniamo la cardinalità di A tramite le seguenti scelte successive:

1) scegliamo il 7 che compare nel primo mazzo: ci sono $n_1 = 4$ possibilità;

2) scegliamo le rimanenti 19 carte del primo mazzo, che non devono essere dei 7: ci sono $n_2 = |\mathbf{C}_{36,19}|$ possibilità.

Quindi $|A| = 4 \cdot |\mathbf{C}_{36,19}|$ e

$$\mathbb{P}(A) \;=\; \frac{4 \cdot |\mathbf{C}_{36,19}|}{|\mathbf{C}_{40,20}|} \;=\; \frac{4 \cdot \binom{36}{19}}{\binom{40}{20}} \;=\; \frac{120}{481} \;\approx\; 25\%.$$

Esercizio 10. $p_n = 1 - \dfrac{\Pi_{i=0}^{n-1}(365-i)}{365^n}$. $p_n > \frac{1}{2}$ se e solo se $n \geq 23$.

Esercizio 11. $\frac{2^{13}}{3^{13}} + \frac{2^{12} \cdot 13}{3^{13}} \approx 0.0385$.