Calcolo delle Probabilità e Statistica 2021/2022

Scheda di esercizi 2 - Probabilità condizionata e indipendenza

Esercizio 1. Una roulette semplificata è formata da 12 numeri che sono "rosso" (R) e "nero" (N) in base allo schema seguente:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
R	R	N	N	R	N	N	R	N	N	R	R

(a) Determinare uno spazio di probabilità che descriva l'esperimento aleatorio.

Siano

- $A =$ "esce un numero pari",
- $B =$ "esce un numero rosso",
- $C =$ "esce un numero ≤ 3",
- $D =$ "esce un numero ≤ 6",
- $E =$ "esce un numero ≤ 8",
- $F =$ "esce un numero dispari ≤ 3".

Calcolare le seguenti probabilità condizionate:

(b) $\mathbb{P}(A|C)$, $\mathbb{P}(C|A)$, $\mathbb{P}(B|C)$, $\mathbb{P}(A|F)$, $\mathbb{P}(D|F)$, $\mathbb{P}(A|B)$, $\mathbb{P}(B|A)$.

Stabilire quindi se:

(c) gli eventi A, B e D sono a 2 a 2 indipendenti;

(d) A, B, D costituiscono una famiglia di eventi indipendenti;

(e) A, B, E costituiscono una famiglia di eventi indipendenti;

(f) A, C, E costituiscono una famiglia di eventi indipendenti;

(g) F è indipendente da A; F è indipendente da D.

Esercizio 2. Si consideri l'esperimento di lanciare due volte un dado.

(a) Determinare uno spazio di probabilità che descriva l'esperimento aleatorio.

(b) Si considerino i seguenti eventi:

- $A =$ "numero dispari sul primo dado",
- $B =$ "numero dispari sul secondo dado",
- $C =$ "la somma dei due risultati è dispari".

Gli eventi A, B e C sono indipendenti?

(c) Si considerino ora gli eventi:

- $E =$ "il risultato del secondo lancio è 1, 2 o 5",
- $F =$ "il risultato del secondo lancio è 4, 5 o 6",
- $G =$ "la somma dei due risultati è 9".

Gli eventi E, F e G sono indipendenti?

Esercizio 3. I componenti prodotti da una ditta possono avere due tipi di difetti con percentuali del 3% e del 7% rispettivamente e in modo indipendente l'uno dall'altro. Qual è la probabilità che un componente scelto a caso

(a) presenti entrambi i difetti?

(b) sia difettoso?

(c) presenti il primo difetto, sapendo che è difettoso?

(d) presenti uno solo dei difetti, sapendo che è difettoso?

Esercizio 4. Un'urna contiene r palline rosse e b palline bianche. Si eseguono due estrazioni *senza reimmissione*.

(a) Determinare uno spazio di probabilità che descriva l'esperimento aleatorio.

Si calcolino le probabilità che:

(b) la prima pallina estratta sia rossa,

(c) la prima pallina estratta sia rossa e la seconda bianca,

(d) le due palline estratte abbiano colore diverso,

(e) la seconda pallina estratta sia rossa.

Esercizio 5. Ci sono quattro dadi: due non truccati, i rimanenti invece sono truccati in quanto hanno tre facce che indicano il numero 6 e le altre tre il numero 5. Si lancia una moneta (non truccata). Se viene testa si lanciano i primi due dadi, mentre se viene croce si lanciano i dadi truccati.

(a) Calcolare la probabilità che la somma dei due dadi sia 11.

(b) Sapendo di aver ottenuto un 11 lanciando i due dadi, calcolare la probabilità di aver ottenuto croce lanciando la moneta.

Esercizio 6 (Urna di Pólya). Supponiamo che un'urna contenga 1 pallina rossa e 1 pallina bianca. Una pallina è estratta e se ne guarda il colore. Essa viene poi rimessa nell'urna insieme ad una pallina dello stesso colore (estrazione *con rinforzo*). Sia R_i l'evento "all'i-esima estrazione viene estratta una pallina rossa" e sia B_i l'evento "all'i-esima estrazione viene estratta una pallina bianca". Si calcolino:

(a) $\mathbb{P}(R_2)$,

(b) sapendo che la seconda estratta è rossa, è più probabile che la prima pallina estratta sia stata rossa o bianca?

Esercizio 7. Si consideri una popolazione in cui una persona su 100 abbia una certa malattia. Un test è disponibile per diagnosticare tale malattia. Si supponga che il test non sia perfetto, in quanto esso risulta positivo (ovvero indica la presenza della malattia) nel 5% dei casi quando è effettuato su persone sane, mentre risulta negativo (indicando l'assenza della malattia) nel 2% dei casi quando è effettuato su persone malate. Si calcolino le probabilità che

(a) il test risulti positivo quando effettuato su una persona malata,

(b) il test risulti positivo,

(c) una persona sia malata se il test risulta positivo.

Esercizio 1.

(a) $(\Omega, \mathbb{P})$ con $\Omega = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12\}$ e $\mathbb{P}$ *probabilità uniforme*, quindi

$$\mathbb{P}(A) \;=\; \frac{\text{n}^{\text{o}} \text{ di eventi elementari che compongono } A}{12}, \qquad \forall\, A \subset \Omega.$$

(b) 1/3, 1/6, 2/3, 0, 1, 1/2, 1/2.

(c) sì

(d) no

(e) sì

(f) no

(g) no e no

Esercizio 2.

(a) $(\Omega, \mathbb{P})$ con $\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}^2$, quindi

$$\begin{aligned}\Omega \;=\; \big\{&(1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(1,5),(1,6),\\ &(2,1),(2,2),(2,3),(2,4),(2,5),(2,6),\\ &(3,1),(3,2),(3,3),(3,4),(3,5),(3,6),\\ &(4,1),(4,2),(4,3),(4,4),(4,5),(4,6),\\ &(5,1),(5,2),(5,3),(5,4),(5,5),(5,6),\\ &(6,1),(6,2),(6,3),(6,4),(6,5),(6,6)\big\},\end{aligned}$$

e $\mathbb{P}$ *probabilità uniforme*, perciò

$$\mathbb{P}(A) \;=\; \frac{\text{n}^{\text{o}} \text{ di eventi elementari che compongono } A}{36}, \qquad \forall\, A \subset \Omega.$$

(b) no

(c) no

Esercizio 3. L'esperimento aleatorio consiste nello scegliere a caso un componente e osservare quali difetti possiede. Introduciamo gli eventi:

$$\begin{aligned}A &= \text{“il componente possiede il primo tipo di difetto”},\\ B &= \text{“il componente possiede il secondo tipo di difetto”}.\end{aligned}$$

Dal testo dell'esercizio sappiamo che

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(A) &= 3\%,\\ \mathbb{P}(B) &= 7\%.\end{aligned}$$

Si sa inoltre che gli eventi A e B sono *indipendenti*.

(a) $\mathbb{P}(A \cap B) = 0.0021 = 0.21\%$

(b) $\mathbb{P}(A \cup B) = 0.0979 = 9.79\%$

(c) $\mathbb{P}(A|A \cup B) = \frac{0.03}{0.0979} \approx 0.3064 = 30.64\%$

(d) $\mathbb{P}((A \cup B)\backslash(A \cap B)|A \cup B) = \frac{0.0979-0.0021}{0.0979} \approx 0.9785 = 97.85\%$

Esercizio 4.

(a) È utile distinguere tra loro le palline dello stesso colore. A tale scopo, etichettiamo le r palline rosse in questo modo:

$$rossa_1, \quad rossa_2, \quad rossa_3, \quad \cdots \quad rossa_r.$$

Facciamo lo stesso per le palline di colore bianco:

$$bianca_1, \quad bianca_2, \quad bianca_3, \quad \cdots \quad bianca_b.$$

Come spazio campionario Ω consideriamo l'insieme di tutte le coppie ordinate di palline *distinte tra loro* (in quanto l'estrazione è *senza reimmissione*):

$$\Omega = \big\{(x_1, x_2) \colon x_1 \text{ e } x_2 \text{ sono elementi } \textit{distinti} \text{ dell'insieme } \{rossa_1, \dots, rossa_r, bianca_1, \dots, bianca_b\}\big\}.$$

Si noti che

$$|\Omega| \ = \ (b+r)(b+r-1).$$

Per come si svolge l'esperimento aleatorio, ogni coppia ha la stessa probabilità di essere estratta di qualsiasi altra, quindi $\mathbb{P}$ è la *probabilità uniforme*. Questo segue infatti dalla *regola della catena:*

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(\{(x_1,x_2)\}) \ &= \ \mathbb{P}(\text{“seconda estratta è } x_2\text{”} \mid \text{“prima estratta è } x_1\text{”})\,\mathbb{P}(\text{“prima estratta è } x_1\text{”}) \\ &= \ \frac{1}{b+r-1}\,\frac{1}{b+r},\end{aligned}$$

per qualunque coppia $(x_1, x_2) \in \Omega$.

(b) $r/(b+r)$

(c) $rb/(b+r)(b+r-1)$

(d) $2rb/(b+r)(b+r-1)$

(e) $r/(b+r)$

Esercizio 5. In questo esercizio non conviene determinare uno spazio di probabilità $(\Omega, \mathbb{P})$ per descrivere l'esperimento aleatorio. Conviene invece lavorare direttamente con gli eventi. Siano

$$\begin{aligned} T \ &= \ \text{“l'esito del lancio della moneta è testa”}, \\ C \ &= \ \text{“l'esito del lancio della moneta è croce”} \ = \ T^c, \\ A \ &= \ \text{“la somma fa 11”}. \end{aligned}$$

Sappiamo che $\mathbb{P}(T) = \mathbb{P}(C) = \frac{1}{2}$. Sappiamo anche che

$$\mathbb{P}(A|T) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{dadi non truccati}}}{=} \frac{2}{36} \ = \ \frac{1}{18}$$

e

$$\mathbb{P}(A|C) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{dadi truccati}}}{=} \frac{18}{36} \ = \ \frac{1}{2}.$$

(a) $\frac{1}{2}\frac{1}{18} + \frac{1}{2}\frac{1}{2} \approx 0.2778 = 27.78\%$

(b) $\frac{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}\frac{1}{18}+\frac{1}{2}\frac{1}{2}} = 0.9 = 90\%$

Esercizio 6.

(a) $0.5 = 50\%$

(b) rossa

Esercizio 7.

(a) $0.98 = 98\%$

(b) $0.01 \cdot 0.98 + 0.99 \cdot 0.05 = 0.0593 = 5.93\%$

(c) $\frac{0.98 \cdot 0.01}{0.0593} \approx 0.1653 = 16.53\%$