

CALCOLO DELLE PROBABILITÀ E STATISTICA 2021/2022

SCHEDA DI ESERCIZI 1 - SPAZI DI PROBABILITÀ

Esercizio 1. Si osservano i risultati del lancio di una moneta e di un dado. Determinare uno spazio campionario Ω che descriva tutti gli esiti dell'esperimento.

Esercizio 2. Chiara e Marco acquistano insieme uno dei 50 biglietti di una pesca di beneficenza. Ci sono 50 premi di cui 7 piacciono a Chiara, 5 a Marco e 1 solo ad entrambi.

1. Determinare uno spazio campionario che descriva i possibili esiti della pesca di beneficenza.
2. Si considerino gli eventi:
 - C = "il premio piacerà a Chiara",
 - M = "il premio piacerà a Marco".

Scrivere in termini di C ed M gli eventi:

- (a) il premio piacerà a entrambi,
- (b) il premio piacerà ad almeno uno dei due,
- (c) a nessuno dei due piacerà il premio,
- (d) il premio piacerà a uno solo dei due.

Esercizio 3. Sia Ω uno spazio campionario e siano A , B e C tre eventi. Tradurre in formule i seguenti eventi associati ad A , B e C :

- (1) almeno un evento si verifica,
- (2) al più un evento si verifica,
- (3) nessun evento si verifica,
- (4) tutti gli eventi si verificano,
- (5) si verifica esattamente un evento,
- (6) due eventi su tre si verificano.

Tradurre in termini probabilistici le seguenti affermazioni:

- (7) A e C si escludono a vicenda,
- (8) almeno un evento fra B e C si verifica certamente.

Esercizio 4. Una moneta viene lanciata due volte. Alessandro vince se al primo lancio esce testa mentre Bernardo vince se al secondo lancio esce croce. Indichiamo con A e B questi due eventi.

1. Determinare uno spazio campionario che descriva tutti i possibili esiti dell'esperimento.
2. Esprimere i seguenti eventi in termini di A e B :
 - (a) Alessandro non vince,
 - (b) Bernardo non vince,
 - (c) Alessandro e Bernardo vincono entrambi,
 - (d) vince Alessandro ma non Bernardo,
 - (e) vince Bernardo ma non Alessandro,

- (f) almeno uno dei due vince,
- (g) nessuno dei due vince,
- (h) vince soltanto uno dei due,
- (i) esce testa al primo lancio ed esce croce al primo lancio,
- (j) esce testa o croce al secondo lancio.

Esercizio 5. Sia Ω uno spazio campionario e siano A, B, C e D quattro eventi. Tradurre in formule i seguenti eventi associati ad A, B, C e D .

1. Esattamente tre eventi su quattro si verificano.
2. Si verifica solo C .
3. Si verifica solo C oppure si verifica solo D .
4. Almeno un evento si verifica.

Esercizio 6. Si consideri $\Omega = \{0, 1\}^5$, lo spazio degli esiti di cinque **prove di Bernoulli**¹. Si considerino gli eventi

$$E_n = \text{“successo alla prova } n\text{”}, \quad \text{per ogni } n = 1, \dots, 5.$$

Scrivere in termini di E_1, E_2, E_3, E_4, E_5 oppure come sottoinsiemi di Ω i seguenti eventi:

1. solo insuccessi,
2. solo la terza prova dà un successo,
3. nelle prove dispari ci sono solo successi,
4. solo un successo.

Esercizio 7. Si consideri $\Omega = \{1, \dots, 6\}^4$, lo spazio degli esiti di quattro lanci di un dado. Per $\ell = 1, \dots, 6$ ed $n = 1, 2, 3, 4$ si considerino gli eventi

$$E_n^\ell = \text{“faccia } \ell \text{ al lancio } n\text{”}.$$

Determinare i seguenti eventi:

- (a) esce sempre 1,
- (b) esce sempre 5,
- (c) solo il terzo lancio dà un 3,
- (d) solo un 4.

Esercizio 8. Una ditta riceve richieste di forniture, che possono essere urgenti oppure no, e richiedere la consegna in città oppure fuori città. Per una data richiesta è noto che:

- (i) la probabilità che sia una consegna fuori città è 0.4,
- (ii) la probabilità che sia una consegna urgente è 0.3,
- (iii) la probabilità che sia una consegna non urgente in città è 0.4.

Calcolare:

¹Una *prova di Bernoulli* è un esperimento aleatorio con solo due esiti possibili, che vengono generalmente indicati con 0 e 1 e chiamati rispettivamente “insuccesso” e “successo”.

- (a) la probabilità che sia una consegna urgente fuori città,
- (b) la probabilità che sia una consegna urgente in città.

Esercizio 9. Sia (Ω, \mathbb{P}) uno spazio di probabilità e siano A e B due eventi con probabilità $\mathbb{P}(A) = 0.4$ e $\mathbb{P}(B) = 0.7$, rispettivamente. Date le seguenti affermazioni dire quali sono sicuramente *false*, quali sono sicuramente *vere*, quali possono essere *vere o false*:

1. $\mathbb{P}(A \cup B) = 0.4$,
2. $\mathbb{P}(A \cup B) = 0.7$,
3. $\mathbb{P}(A \cup B) \geq 0.7$,
4. $\mathbb{P}(A \cup B) = 1.1$,
5. $\mathbb{P}(A \cap B) = 0.28$,
6. $\mathbb{P}(A \cap B^c) \leq 0.3$,
7. $\mathbb{P}(A^c \cap B) \geq 0.3$.

SOLUZIONI

Esercizio 1. $\Omega = \{T, C\} \times \{1, \dots, 6\}$, quindi

$$\Omega = \{(T, 1), (T, 2), (T, 3), (T, 4), (T, 5), (T, 6), (C, 1), (C, 2), (C, 3), (C, 4), (C, 5), (C, 6)\}.$$

Esercizio 2.

1. $\Omega = \{1, \dots, 50\}$
2. (a) $C \cap M$
 (b) $C \cup M$
 (c) $(C \cup M)^c$
 (d) $(C \cup M) \setminus (C \cap M)$

Esercizio 3.

- (1) $A \cup B \cup C$
- (2) $(A \cap B^c \cap C^c) \cup (A^c \cap B \cap C^c) \cup (A^c \cap B^c \cap C) \cup (A^c \cap B^c \cap C^c)$
- (3) $(A^c \cap B^c \cap C^c)$
- (4) $(A \cap B \cap C)$
- (5) $(A \cap B^c \cap C^c) \cup (A^c \cap B \cap C^c) \cup (A^c \cap B^c \cap C)$
- (6) $(A^c \cap B \cap C) \cup (A \cap B^c \cap C) \cup (A \cap B \cap C^c)$
- (7) $\mathbb{P}(A \cap C) = 0$
- (8) $\mathbb{P}(B \cup C) = 1$

Esercizio 4.

1. $\Omega = \{(T, T), (T, C), (C, T), (C, C)\}$
2. (a) A^c
 (b) B^c
 (c) $A \cap B = \{(T, C)\}$
 (d) $A \cap B^c$
 (e) $A^c \cap B$
 (f) $A \cup B$
 (g) $A^c \cap B^c = \{(C, T)\}$
 (h) $(A \cap B^c) \cup (A^c \cap B) = \{(T, T), (C, C)\}$
 (i) \emptyset
 (j) Ω

Esercizio 5.

1. $(A \cap B \cap C \cap D^c) \cup (A \cap B \cap C^c \cap D) \cup (A \cap B^c \cap C \cap D) \cup (A^c \cap B \cap C \cap D)$
2. $A^c \cap B^c \cap C \cap D^c$

3. $(A^c \cap B^c \cap C \cap D^c) \cup (A^c \cap B^c \cap C^c \cap D)$

4. $A \cup B \cup C \cup D$

Esercizio 6.

(a) $\bigcap_{n=1}^5 E_n^c = \{(0, 0, 0, 0, 0)\}$

(b) $E_3 \cap (\bigcap_{n \neq 3} E_n^c) = \{(0, 0, 1, 0, 0)\}$

(c) $E_1 \cap E_3 \cap E_5 = \{(1, 0, 1, 0, 1), (1, 1, 1, 0, 1), (1, 0, 1, 1, 1), (1, 1, 1, 1, 1)\}$

(d) $\{(1, 0, 0, 0, 0), (0, 1, 0, 0, 0), (0, 0, 1, 0, 0), (0, 0, 0, 1, 0), (0, 0, 0, 0, 1)\}$, che in termini degli eventi E_n diventa

$$\begin{aligned} & (E_1^c \cap E_2 \cap E_3 \cap E_4 \cap E_5) \cup (E_1 \cap E_2^c \cap E_3 \cap E_4 \cap E_5) \cup (E_1 \cap E_2 \cap E_3^c \cap E_4 \cap E_5) \cup \\ & \cup (E_1 \cap E_2 \cap E_3 \cap E_4^c \cap E_5) \cup (E_1 \cap E_2 \cap E_3 \cap E_4 \cap E_5^c). \end{aligned}$$

Esercizio 7.

(a) $E_1^1 \cap E_2^1 \cap E_3^1 \cap E_4^1 = \{(1, 1, 1, 1)\}$,

(b) $E_1^5 \cap E_2^5 \cap E_3^5 \cap E_4^5 = \{(5, 5, 5, 5)\}$,

(c) $(E_1^3)^c \cap (E_2^3)^c \cap E_3^3 \cap (E_4^3)^c$,

(d) $(E_1^4 \cap (E_2^4)^c \cap (E_3^4)^c \cap (E_4^4)^c) \cup ((E_1^4)^c \cap E_2^4 \cap (E_3^4)^c \cap (E_4^4)^c) \cup ((E_1^4)^c \cap (E_2^4)^c \cap E_3^4 \cap (E_4^4)^c) \cup ((E_1^4)^c \cap (E_2^4)^c \cap (E_3^4)^c \cap E_4^4)$.

Esercizio 8.

(a) 0.1

(b) 0.2

Esercizio 9.

1. F

2. V/F

3. V

4. F

5. V/F

6. V

7. V