Calcolo delle Probabilità e Statistica 2021/2022

Vettori aleatori

INTRODUZIONE GENERALE
e
CASO DISCRETO

ALMA MATER STUDIORUM
UNIVERSITÀ DI BOLOGNA

1 Introduzione

In questo capitolo studiamo i *vettori aleatori*. Essi intervengono ogni volta che si è interessati a *due* o *più* variabili aleatorie che riguardano lo stesso esperimento aleatorio oppure quando la quantità d'interesse è essa stessa *vettoriale*.

In termini matematici, ciò significa che sullo stesso spazio di probabilità $(\Omega, \mathbb{P})$ sono definite due (o più) variabili aleatorie $X \colon \Omega \to \mathbb{R}$ e $Y \colon \Omega \to \mathbb{R}$. Risulta allora naturale considerare la coppia (X, Y), che è una variabile aleatoria definita su Ω a valori nello spazio prodotto $\mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^2$. Chiameremo (X, Y) *vettore aleatorio* (bidimensionale).

Definizione 1.1. *Sia $(\Omega, \mathbb{P})$ uno spazio di probabilità.*

Una qualunque funzione

$$(X, Y) \colon \Omega \to \mathbb{R}^2$$

si chiama ***vettore aleatorio (bidimensionale)****.*

Più in generale, una qualunque funzione

$$(X_1, X_2, \dots, X_n) \colon \Omega \to \mathbb{R}^n$$

si chiama ***vettore aleatorio*** *(n-**dimensionale**).*

1.1 Distribuzione o legge di un vettore aleatorio

Come per le variabili aleatorie, possiamo associare ad ogni vettore aleatorio la sua *distribuzione* o *legge*. Diamo la definizione solo per il caso bidimensionale.

Definizione 1.2. *Sia $(\Omega, \mathbb{P})$ uno spazio di probabilità e $(X, Y) \colon \Omega \to \mathbb{R}$ un vettore aleatorio. Si chiama* ***distribuzione*** *o* ***legge*** *di (X, Y) la probabilità*[a]

$$\mathbb{P}_{(X,Y)} \colon \mathscr{P}(\mathbb{R}^2) \;\to\; [0, 1]$$

definita da

$$\mathbb{P}_{(X,Y)}(B) \;=\; \mathbb{P}((X, Y) \in B), \qquad \forall\, B \subset \mathbb{R}^2.$$

Per dire che (X, Y) ha distribuzione o legge $\mathbb{P}_{(X,Y)}$ scriveremo

$$(X, Y) \;\sim\; \mathbb{P}_{(X,Y)}.$$

[a] Ricordiamo che $\mathscr{P}(\mathbb{R}^2)$ è l'insieme delle parti di $\mathbb{R}^2$.

Osservazione 1. *Si noti che andrebbe verificato che $\mathbb{P}_{(X,Y)}$ è effettivamente una probabilità, ovvero che $\mathbb{P}_{(X,Y)}$ verifica gli* Assiomi I-II-III.

Osservazione 2. *Se $B \subset \mathbb{R}^2$ è il prodotto cartesiano di due sottoinsiemi di $\mathbb{R}$, quindi*

$$B \;=\; B_1 \times B_2,$$

per qualche $B_1, B_2 \in \mathbb{R}$, allora

$$\mathbb{P}((X,Y) \in B_1 \times B_2) \;=\; \mathbb{P}(\{X \in B_1\} \cap \{Y \in B_2\}).$$

Infatti l'evento $\{(X,Y) \in B_1 \times B_2\}$ è dato da

$$\{(X,Y) \in B_1 \times B_2\} \;=\; \{X \in B_1\} \cap \{Y \in B_2\}.$$

NOTAZIONE 1. *Nel seguito spesso dovremo calcolare la probabilità di un evento della forma $\{X \in B_1\} \cap \{Y \in B_2\}$, ovvero*

$$\mathbb{P}(\{X \in B_1\} \cap \{Y \in B_2\}).$$

Per semplificare la notazione, invece di $\mathbb{P}(\{X \in B_1\} \cap \{Y \in B_2\})$ spesso scriveremo

$$\mathbb{P}(X \in B_1, Y \in B_2) \qquad \textit{oppure} \qquad \mathbb{P}(X \in B_1 \text{ e } Y \in B_2).$$

In altre parole, la virgola *(oppure la congiunzione* e*) sta per* intersezione*.*

NOTAZIONE 2. *$\mathbb{P}_{(X,Y)}$ si chiama **distribuzione di** (X,Y) oppure anche **distribuzione congiunta di** X **e** Y. Inoltre le distribuzioni di X e Y, ovvero $\mathbb{P}_X$ e $\mathbb{P}_Y$, si chiamano **distribuzioni marginali**.*

Funzione di ripartizione congiunta. È possibile estendere al caso multidimensionale il concetto di funzione di ripartizione. Si può infatti definire la *funzione di ripartizione congiunta* di X e Y:

$$F_{(X,Y)}(x,y) \;=\; \mathbb{P}(\{X \le x\} \cap \{Y \le y\}) \;=\; \mathbb{P}((X,Y) \in (-\infty,x] \times (-\infty,y]), \quad \forall\,(x,y) \in \mathbb{R}^2,$$

dove la seconda uguaglianza discende dall'Osservazione 2 riportata sopra. Equivalentemente, possiamo definire $F_{(X,Y)}$ in termini della distribuzione di (X,Y):

$$F_{(X,Y)}(x,y) \;=\; \mathbb{P}_{(X,Y)}((-\infty,x] \times (-\infty,y]), \quad \forall\,(x,y) \in \mathbb{R}^2.$$

Nel caso multidimensionale, tuttavia, la funzione di ripartizione non è praticamente utilizzata. Infatti conviene lavorare direttamente con la densità (discreta o continua).

1.2 Indipendenza di variabili aleatorie

Grazie al concetto di vettore aleatorio è possibile estendere la nozione di *indipendenza*, già definita per gli eventi, alle variabili aleatorie.

Il significato intuitivo della nozione d'indipendenza di variabili aleatorie è il seguente: più variabili aleatorie si dicono indipendenti se la conoscenza dei valori assunti da alcune di esse non fornisce alcuna informazione sul valore che assumeranno le altre.

Matematicamente, n variabili aleatorie $X_1, \dots, X_n$ si dicono indipendenti se gli eventi da esse generati, ovvero

$$\{X_1 \in B_1\} \quad \dots \quad \{X_n \in B_n\}, \qquad \text{al variare di tutti i sottoinsiemi } B_1, \dots, B_n \text{ di } \mathbb{R},$$

sono indipendenti. Riportiamo prima la definizione per due variabili aleatorie, poi per n variabili aleatorie.

Definizione 1.3. *Sia $(\Omega, \mathbb{P})$ uno spazio di probabilità. Due variabili aleatorie X e Y si dicono* ***indipendenti*** *se*

$$\mathbb{P}(X \in B_1, Y \in B_2) \;=\; \mathbb{P}(X \in B_1)\,\mathbb{P}(Y \in B_2),$$

per ogni $B_1, B_2 \subset \mathbb{R}$, o, equivalentemente,

$$\mathbb{P}_{(X,Y)}(B_1 \times B_2) \;=\; \mathbb{P}_X(B_1)\,\mathbb{P}_Y(B_2).$$

In tal caso, scriviamo

$$X \perp\!\!\!\perp Y.$$

Osservazione. *Si dice anche che due variabili aleatorie sono indipendenti se* ***la distribuzione congiunta si fattorizza nel prodotto delle marginali****.*

Definizione 1.4. *Sia $(\Omega, \mathbb{P})$ uno spazio di probabilità. n variabili aleatorie $X_1, \ldots, X_n$ si dicono* ***indipendenti*** *se*

$$\mathbb{P}(X_1 \in B_1, \ldots, X_n \in B_n) \;=\; \prod_{i=1}^{n} \mathbb{P}(X_i \in B_i),$$

per ogni $B_1, \ldots, B_n \subset \mathbb{R}$.

Concludiamo questa sezione con il seguente risultato, in cui si afferma che *funzioni di variabili aleatorie indipendenti sono indipendenti*.

Proposizione 1.1. *Siano X e Y variabili aleatorie indipendenti. Siano inoltre $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funzioni arbitrarie. Allora anche le variabili aleatorie*

$$f(X) \quad \text{e} \quad g(Y)$$

sono ***indipendenti****.*

Dimostrazione. Siano $B_1, B_2 \subset \mathbb{R}$. Dobbiamo mostrare che

$$\mathbb{P}(f(X) \in B_1, g(Y) \in B_2) \;=\; \mathbb{P}(f(X) \in B_1)\,\mathbb{P}(g(Y) \in B_2).$$

Siano

$$\begin{aligned} f^{-1}(B_1) \;&=\; \big\{x \in \mathbb{R} \colon f(x) \in B_1\big\}, \\ g^{-1}(B_2) \;&=\; \big\{y \in \mathbb{R} \colon g(y) \in B_2\big\} \end{aligned}$$

le *controimmagini* di B_1 e B_2 tramite f e g, rispettivamente. Si noti che $f^{-1}(B_1)$ e $g^{-1}(B_2)$ sono sottoinsiemi di $\mathbb{R}$. Allora

$$\{f(X) \in B_1\} \;=\; \{X \in f^{-1}(B_1)\} \qquad \text{e} \qquad \{g(Y) \in B_2\} \;=\; \{Y \in g^{-1}(B_2)\}. \tag{1.1}$$

Quindi

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(f(X) \in B_1, g(Y) \in B_2) &= \mathbb{P}(X \in f^{-1}(B_1), Y \in g^{-1}(B_2)) \\
&\underset{X \perp\!\!\!\perp Y}{\underset{\uparrow}{=}} \mathbb{P}(X \in f^{-1}(B_1))\,\mathbb{P}(Y \in g^{-1}(B_2)),
\end{aligned}$$

dove nella seconda uguaglianza abbiamo usato l'indipendenza di X e Y. Utilizzando nuovamente le uguaglianze (1.1), si ottiene

$$\mathbb{P}(X \in f^{-1}(B_1))\,\mathbb{P}(Y \in g^{-1}(B_2)) = \mathbb{P}(f(X) \in B_1)\,\mathbb{P}(g(Y) \in B_2),$$

che conclude la dimostrazione. □

Osservazione. *Come conseguenza della Proposizione 1.1 si deduce che se X e Y sono indipendenti allora non può esistere alcuna* ***dipendenza funzionale*** *tra X e Y, tranne nel caso in cui almeno una tra X e Y sia una costante*[1]*.*
In altri termini, non può esistere alcuna funzione $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tale che

$$Y = f(X).$$

Infatti, supponiamo per assurdo che una tale funzione esista. Allora, applicando la Proposizione 1.1 con questa funzione f e $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funzione identità, quindi

$$g(y) = y, \qquad \forall\, y \in \mathbb{R},$$

si ottiene che le variabili aleatorie

$$f(X) \quad e \quad g(Y) = Y = f(X)$$

sono indipendenti. Quindi, per ogni $B \subset \mathbb{R}$ (scegliendo $B_1 = B_2 = B$ nella definizione di indipendenza),

$$\mathbb{P}(\{f(X) \in B\} \cap \{f(X) \in B\}) = \mathbb{P}(f(X) \in B)\,\mathbb{P}(f(X) \in B).$$

Notando che $\{f(X) \in B\} \cap \{f(X) \in B\} = \{f(X) \in B\}$, otteniamo

$$\mathbb{P}(f(X) \in B) = \mathbb{P}(f(X) \in B)^2. \tag{1.2}$$

Quest'ultima uguaglianza è verificata se e solo se $\mathbb{P}(f(X) \in B)$ è uguale a 0 oppure 1, quindi se e solo se $f(X)$ è costante, ossia Y è costante. Se invece Y non è costante, esiste sicuramente un sottoinsieme B di $\mathbb{R}$ tale per cui

$$\mathbb{P}(f(X) \in B) \neq 0 \qquad e \qquad \mathbb{P}(f(X) \in B) \neq 1,$$

da cui si ottiene una contraddizione con (1.2).

[1] Infatti, se ad esempio Y è costante (quindi $Y = c$) allora $Y = f(X)$ scegliendo come funzione $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la funzione costante: $f(x) = c$, per ogni $x \in \mathbb{R}$.

2 *Vettori aleatori discreti*

In questa sezione studiamo una particolare classe di vettori aleatori, i *vettori aleatori discreti* (bidimensionali).

Definizione 2.1. *Sia $(\Omega, \mathbb{P})$ uno spazio di probabilità e (X, Y) un vettore aleatorio. Si dice che (X, Y) è un* ***vettore aleatorio discreto*** *se sia X che Y sono variabili aleatorie discrete.*

Dalla definizione di vettore aleatorio discreto si intuisce che il vettore (X, Y) assume solo un numero finito (o al più infinito numerabile) di valori, dati al più da tutte le coppie dell'insieme $\mathcal{S}_X \times \mathcal{S}_Y$. In altre parole, il[2] "supporto" di (X, Y) è un sottoinsieme di $\mathcal{S}_X \times \mathcal{S}_Y$.

Come abbiamo visto per le variabili aleatorie discrete, anche nello studio dei vettori aleatori discreti risulta particolarmente utile la densità discreta, che ora introduciamo.

Definizione 2.2. *Sia $(\Omega, \mathbb{P})$ uno spazio di probabilità e (X, Y) un vettore aleatorio. La funzione $p_{(X,Y)} \colon \mathbb{R}^2 \to [0, 1]$, data da*

$$p_{(X,Y)}(x, y) \;=\; \mathbb{P}(X = x, Y = y) \;=\; \mathbb{P}((X, Y) = (x, y)), \qquad \forall\, (x, y) \in \mathbb{R}^2,$$

si chiama ***densità discreta congiunta*** *di X e Y.*

Infine, p_X e p_Y si chiamano ***densità discrete marginali*** *di X e Y, rispettivamente.*

Si noti che $p_{(X,Y)}(x, y)$ è la *probabilità* che il vettore aleatorio (X, Y) assuma il valore (x, y). Per tale ragione, $p_{(X,Y)}(x, y)$ verifica necessariamente le disuguaglianze

$$0 \;\le\; p_{(X,Y)}(x, y) \;\le\; 1, \qquad \forall\, (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

Osservazione. *In certi casi, come vedremo, è utile calcolare $p_{(X,Y)}(x, y)$ tramite la* regola della catena:

$$p_{(X,Y)}(x, y) \;=\; \mathbb{P}(X = x \,|\, Y = y)\, \mathbb{P}(Y = y)$$

oppure

$$p_{(X,Y)}(x, y) \;=\; \mathbb{P}(Y = y \,|\, X = x)\, \mathbb{P}(X = x).$$

Le principali proprietà della densità discreta congiunta di X e Y sono riportate nel seguente teorema.

[2] Il supporto di (X, Y) è l'insieme dei punti di $\mathbb{R}^2$ tali per cui $p_{(X,Y)}(x, y) > 0$, dove $p_{(X,Y)}$ è la densità discreta congiunta di X e Y definita nella Definizione 2.2. Tuttavia, nel caso bidimensionale invece di introdurre un'ulteriore notazione si preferisce lavorare direttamente con l'insieme $\mathcal{S}_X \times \mathcal{S}_Y$, si veda a tal proposito il Teorema 2.1.

Teorema 2.1. *Sia* $(\Omega, \mathbb{P})$ *uno spazio di probabilità e* (X, Y) *un vettore aleatorio discreto. Siano inoltre* $\mathcal{S}_X$ *e* $\mathcal{S}_Y$ *i supporti di* X *e* Y*, rispettivamente. Valgono le seguenti proprietà.*

1) $p_{(X,Y)}(x, y) = 0$*, per ogni* $(x, y) \notin \mathcal{S}_X \times \mathcal{S}_Y$.

2) $\sum_{x_i \in \mathcal{S}_X} \sum_{y_j \in \mathcal{S}_Y} p_{(X,Y)}(x_i, y_j) = 1$.

3) *Vale la formula*

$$\mathbb{P}((X, Y) \in B) \;=\; \sum_{(x_i, y_j) \in B} p_{(X,Y)}(x_i, y_j), \qquad \forall\, B \subset \mathbb{R}^2. \tag{2.1}$$

Notazione. *La notazione* $\sum_{x_i \in \mathcal{S}_X} \sum_{y_j \in \mathcal{S}_Y} p_{(X,Y)}(x_i, y_j)$ *indica una doppia sommatoria, in cui prima si somma rispetto a* y_j*, tenendo* x_i *fissato, dopodiché si somma il risultato così ottenuto rispetto a* x_i.
Il risultato finale non cambia se si scambia l'ordine delle sommatorie, come conseguenza della proprietà commutativa *dell'addizione:*

$$\sum_{x_i \in \mathcal{S}_X} \sum_{y_j \in \mathcal{S}_Y} p_{(X,Y)}(x_i, y_j) \;=\; \sum_{y_j \in \mathcal{S}_Y} \sum_{x_i \in \mathcal{S}_X} p_{(X,Y)}(x_i, y_j).$$

Come conseguenza di tale invarianza, questa doppia sommatoria è anche indicata come segue:

$$\sum_{(x_i, y_j) \in \mathcal{S}_X \times \mathcal{S}_Y} p_{(X,Y)}(x_i, y_j).$$

Infine, se è chiaro dal testo quale sia l'insieme $\mathcal{S}_X \times \mathcal{S}_Y$ *a cui appartengono le coppie* (x_i, y_j)*, allora si scrive semplicemente*

$$\sum_{i,j} p_{(X,Y)}(x_i, y_j),$$

sottintendendo che si esegue la somma su tutte le coppie $(x_i, y_j) \in \mathcal{S}_X \times \mathcal{S}_Y$*. Se invece si esegue la somma solo sulle coppie di* $\mathcal{S}_X \times \mathcal{S}_Y$ *che appartengono ad un determinato sottoinsieme* B *di* $\mathbb{R}^2$*, allora si scrive*

$$\sum_{(x_i, y_j) \in B} p_{(X,Y)}(x_i, y_j),$$

come accade nella formula (2.1).

Osservazione. *Le proprietà* 1) *e* 2) *del Teorema 2.1 sono in effetti tra loro* ***equivalenti****. Esse equivalgono a dire che il vettore aleatorio* (X, Y) *assume con probabilità positiva al più tutti e soli i valori in* $\mathcal{S}_X \times \mathcal{S}_Y$.

2.1 Densità discreta congiunta e densità discrete marginali

Che relazione c'è tra la densità discreta congiunta $p_{(X,Y)}$ e le marginali p_X e p_Y? Ricordiamo che

$$p_X(x_i) \;=\; \mathbb{P}(X = x_i),$$

$$
\begin{aligned}
p_Y(y_j) &= \mathbb{P}(Y = y_j), \\
p_{(X,Y)}(x_i, y_j) &= \mathbb{P}(X = x_i, Y = y_j).
\end{aligned}
$$

Dalla *formula delle probabilità totali* otteniamo il seguente risultato.

Teorema 2.2. *Sia (X, Y) un vettore aleatorio discreto. Allora*

$$
\begin{aligned}
p_X(x_i) &= \sum_j p_{(X,Y)}(x_i, y_j), \qquad \forall\, x_i \in \mathcal{S}_X, \\
p_Y(y_j) &= \sum_i p_{(X,Y)}(x_i, y_j), \qquad \forall\, y_j \in \mathcal{S}_Y.
\end{aligned}
$$

Dimostrazione. Dimostriamo solo la prima formula nel caso in cui $\mathcal{S}_Y$ è un insieme finito: $\mathcal{S}_Y = \{y_1, \dots, y_m\}$. Quindi dobbiamo dimostrare che, per ogni $x_i \in \mathcal{S}_X$ fissato, vale

$$
p_X(x_i) = \sum_{j=i}^{m} p_{(X,Y)}(x_i, y_j).
$$

Riscritta in termini di $\mathbb{P}$ diventa

$$
\mathbb{P}(X = x_i) = \sum_{j=i}^{m} \mathbb{P}(X = x_i, Y = y_j). \tag{2.2}
$$

Poniamo

$$
A = \{X = x_i\}, \qquad\qquad B_j = \{Y = y_j\}, \quad \forall\, j = 1, \dots, m.
$$

Gli eventi $B_1, \dots, B_m$ sono una partizione di Ω. Quindi, dalla formula delle probabilità totali abbiamo che

$$
\mathbb{P}(A) = \sum_{j=i}^{m} \mathbb{P}(A \cap B_j),
$$

che corrisponde all'uguaglianza (2.2). $\square$

Tabella della densità discreta congiunta. Nel caso in cui sia $\mathcal{S}_X$ che $\mathcal{S}_Y$ sono insiemi finiti, quindi

$$
\begin{aligned}
\mathcal{S}_X &= \{x_1, \dots, x_n\}, \\
\mathcal{S}_Y &= \{y_1, \dots, y_m\},
\end{aligned}
$$

possiamo riportare i valori di $p_{(X,Y)}$ in una *tabella:*

$X \backslash Y$	y_1	y_2	$\cdots$	y_m	p_X
x_1	$p_{(X,Y)}(x_1, y_1)$	$p_{(X,Y)}(x_1, y_2)$	$\cdots$	$p_{(X,Y)}(x_1, y_m)$	$p_X(x_1)$
x_2	$p_{(X,Y)}(x_2, y_1)$	$p_{(X,Y)}(x_2, y_2)$	$\cdots$	$p_{(X,Y)}(x_2, y_m)$	$p_X(x_2)$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$
x_n	$p_{(X,Y)}(x_n, y_1)$	$p_{(X,Y)}(x_n, y_2)$	$\cdots$	$p_{(X,Y)}(x_n, y_m)$	$p_X(x_n)$
p_Y	$p_Y(y_1)$	$p_Y(y_2)$	$\cdots$	$p_Y(y_m)$	1

Ai margini della tabella compaiono appunto le *densità discrete marginali*. Per il Teorema 2.2 si ha che i valori di p_X si ottengono sommando i valori di $p_{(X,Y)}$ che compaiono sulla stessa riga. Analogamente, i valori di p_Y si ottengono sommando i valori di $p_{(X,Y)}$ che compaiono sulla stessa colonna. Infine, sommando i valori dell'ultima colonna (quindi i valori di p_X) si ottiene 1. Analogamente, sommando i valori dell'ultima riga (quindi i valori di p_Y) si ottiene ancora 1. Questo spiega la presenza del numero 1 nell'angolo in basso a destra della tabella.

2.2 Indipendenza e densità discreta congiunta

Come abbiamo visto con il Teorema 2.2, e come segue anche dalla tabella della densità discreta congiunta, se si conosce la congiunta $p_{(X,Y)}$ allora è possibile ricostruire le marginali p_X e p_Y. Non è invece possibile, in generale, ricostruire la congiunta a partire dalle marginali. Infatti, esistono densità discrete congiunte tra loro diverse ma con le stesse marginali. Un esempio è dato dalle seguenti tabelle:

$X \backslash Y$	y_1	y_2	p_X
x_1	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$
x_2	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
p_Y	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1

$X \backslash Y$	y_1	y_2	p_X
x_1	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$
x_2	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$
p_Y	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1

(2.3)

Tali tabelle si ottengono considerando delle coppie (X, Y) come quelle considerate nel seguente esempio.

Esercizio 2.1. *Si lanciano due monete e si considerano le seguenti variabili aleatorie*

$$\begin{aligned} X_1 &= \text{“}\textit{vale } 1 \textit{ se l'esito del lancio della prima moneta è } \text{testa}, \textit{ vale } 0 \textit{ altrimenti”}, \\ X_2 &= \text{“}\textit{vale } 1 \textit{ se l'esito del lancio della seconda moneta è } \text{testa}, \textit{ vale } 0 \textit{ altrimenti”}. \end{aligned}$$

Se si considera il vettore aleatorio (X_1, X_2)*, allora*

$X_1 \backslash X_2$	0	1	p_{X_1}
0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$
1	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$
p_{X_2}	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1

Se invece si considera il vettore aleatorio (X_1, X_1)*, allora*

$X_1 \backslash X_1$	0	1	p_{X_1}
0	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$
1	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
p_{X_1}	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1

Se X e Y sono *indipendenti* allora esiste un'unica densità discreta congiunta avente come marginali proprio quelle di X e Y, come affermato nel seguente teorema.

Teorema 2.3. *Siano X e Y variabili aleatorie discrete. Allora X e Y sono indipendenti se e solo se*

$$p_{(X,Y)}(x_i, y_j) \;=\; p_X(x_i)\, p_Y(y_j), \qquad \forall\,(x_i, y_j) \in \mathcal{S}_X \times \mathcal{S}_Y. \tag{2.4}$$

Osservazione. *Si dice anche che due variabili aleatorie discrete sono indipendenti se e solo se* ***la densità discreta congiunta si fattorizza nel prodotto delle marginali****. Ad esempio, se si considerano le due tabelle in* (2.3)*, in quella di sinistra X e Y non sono indipendenti, mentre in quella di destra sono indipendenti. Dunque, la tabella di destra è l'unica possibile affinché X e Y abbiamo quelle marginali e siano anche indipendenti.*

Dimostrazione del Teorema 2.3. Dividiamo la dimostrazione in due passi.
1) *Se vale* (2.4) *allora X e Y sono indipendenti.* Siano B_1 e B_2 sottoinsiemi di $\mathbb{R}$. Dobbiamo mostrare che

$$\mathbb{P}(X \in B_1, Y \in B_2) \;=\; \mathbb{P}(X \in B_1)\,\mathbb{P}(Y \in B_2).$$

Poiché $\mathbb{P}(X \in B_1, Y \in B_2) = \mathbb{P}((X,Y) \in B_1 \times B_2)$, applicando la formula (2.1) otteniamo

$$\mathbb{P}(X \in B_1, Y \in B_2) \;=\; \sum_{(x_i,y_j)\in B_1\times B_2} p_{(X,Y)}(x_i, y_j) \;=\; \sum_{x_i\in B_1}\sum_{y_j\in B_2} p_{(X,Y)}(x_i, y_j),$$

dove l'ultima uguaglianza segue dal fatto che essendo $B_1 \times B_2$ un prodotto cartesiano, possiamo prima sommare rispetto a y_j e poi rispetto a x_i, e viceversa.
Dalla (2.4) segue che

$$\mathbb{P}(X \in B_1, Y \in B_2) \;=\; \sum_{x_i\in B_1}\sum_{y_j\in B_2} p_X(x_i)\, p_Y(y_j).$$

La somma interna, in cui si somma rispetto a y_j tenendo x_i fissato, diventa

$$\sum_{y_j\in B_2} p_X(x_i)\, p_Y(y_j) \;=\; p_X(x_i) \sum_{y_j\in B_2} p_Y(y_j) \;=\; p_X(x_i)\,\mathbb{P}(Y \in B_2).$$

Quindi

$$\mathbb{P}(X \in B_1, Y \in B_2) \;=\; \mathbb{P}(Y \in B_2) \sum_{x_i\in B_1} p_X(x_i) \;=\; \mathbb{P}(X \in B_1)\,\mathbb{P}(Y \in B_2).$$

2) *Se X e Y sono indipendenti allora vale* (2.4). Se sappiamo già che X e Y sono indipendenti, allora applicando la definizione di indipendenza con $B_1 = \{x_i\}$ e $B_2 = \{y_j\}$ si ottiene proprio l'uguaglianza (2.4). $\square$

Esercizio 2.2. *Siano X e Y variabili aleatorie discrete con densità discreta congiunta parzialmente data da*

$X \backslash Y$	-1	5	10	p_X
0		0.12		0.4
5				
p_Y	0.3			1

(a) *Completare la tabella in modo che X e Y siano indipendenti.*

(b) *Calcolare $\mathbb{P}(X < Y)$.*

(c) *Calcolare $\mathbb{P}(|XY| \geq 5)$ e $\mathbb{P}(X + Y > 5)$.*

(d) *Siano $U = |XY|$ e $V = X + Y$. Trovare la densità discreta congiunta di U e V e le densità marginali.*

Soluzione.

(a) Sappiamo che l'ultima colonna deve avere come somma 1, quindi si ottiene

$X \backslash Y$	-1	5	10	p_X
0		0.12		0.4
5				**0.6**
p_Y	0.3			1

Dal Teorema 2.3 sappiamo che affinché X e Y siano indipendenti la densità discreta congiunta deve essere il prodotto delle marginali. In particolare, si ha che

$$p_{(X,Y)}(0,5) = p_X(0)\,p_Y(5) \qquad \Longrightarrow \qquad p_Y(5) = \frac{p_{(X,Y)}(0,5)}{p_X(0)} = \frac{0.12}{0.4} = 0.3.$$

Quindi

$X \backslash Y$	-1	5	10	p_X
0		0.12		0.4
5				0.6
p_Y	0.3	**0.3**		1

Poiché l'ultima riga deve avere come somma 1, otteniamo

$X \backslash Y$	-1	5	10	p_X
0		0.12		0.4
5				0.6
p_Y	0.3	0.3	**0.4**	1

Adesso che abbiamo completamente determinato le densità marginali, per l'*indipendenza* la densità discreta congiunta si ottiene facendo il prodotto. Quindi la tabella completata è data da

$X \backslash Y$	-1	5	10	p_X
0	0.12	0.12	0.16	0.4
5	0.18	0.18	0.24	0.6
p_Y	0.3	0.3	0.4	1

(b) Per la formula (2.1), si ha che

$$\mathbb{P}(X < Y) \;=\; \sum_{(x_i,y_j)\colon x_i<y_j} p_{(X,Y)}(x_i,y_j).$$

Le coppie (x_i, y_j) che verificano la condizione $x_i < y_j$ sono: $(0,5)$, $(0,10)$, $(5,10)$. Quindi

$$\mathbb{P}(X < Y) \;=\; p_{(X,Y)}(0,5) + p_{(X,Y)}(0,10) + p_{(X,Y)}(5,10) \;=\; 0.52.$$

(c) Procedendo come al punto precedente, si ottiene

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(|XY| \geq 5) \;&=\; p_{(X,Y)}(5,-1) + p_{(X,Y)}(5,5) + p_{(X,Y)}(5,10) \;=\; p_X(5) \;=\; 0.6,\\
\mathbb{P}(X + Y > 5) \;&=\; p_{(X,Y)}(0,10) + p_{(X,Y)}(5,5) + p_{(X,Y)}(5,10) \;=\; 0.58.
\end{aligned}$$

(d) Iniziamo col determinare i valori di (U,V) per ciascuna coppia di valori di (X,Y). Si ha che

$$\begin{array}{llll}
\text{se} & (X,Y) = (0,-1) & \text{allora} & (U,V) = (0,-1),\\
\text{se} & (X,Y) = (0,5) & \text{allora} & (U,V) = (0,5),\\
\text{se} & (X,Y) = (0,10) & \text{allora} & (U,V) = (0,10),\\
\text{se} & (X,Y) = (5,-1) & \text{allora} & (U,V) = (5,4),\\
\text{se} & (X,Y) = (5,5) & \text{allora} & (U,V) = (25,10),\\
\text{se} & (X,Y) = (5,10) & \text{allora} & (U,V) = (50,15).
\end{array}$$

Quindi $\mathcal{S}_U = \{0,5,25,50\}$ e $\mathcal{S}_V = \{-1,4,5,10,15\}$. Determiniamo ora $p_{(U,V)}$. Per quanto visto qui sopra, abbiamo che

$$\begin{aligned}
p_{(U,V)}(0,-1) \;&=\; p_{(X,Y)}(0,-1),\\
p_{(U,V)}(0,5) \;&=\; p_{(X,Y)}(0,5),\\
p_{(U,V)}(0,10) \;&=\; p_{(X,Y)}(0,10),\\
p_{(U,V)}(5,4) \;&=\; p_{(X,Y)}(5,-1),\\
p_{(U,V)}(25,10) \;&=\; p_{(X,Y)}(5,5),\\
p_{(U,V)}(50,15) \;&=\; p_{(X,Y)}(5,10).
\end{aligned}$$

La tabella della densità discreta congiunta di U e V è dunque la seguente:

$U \backslash V$	-1	4	5	10	15	p_U
0	0.12	0	0.12	0.16	0	0.4
5	0	0.18	0	0	0	0.18
25	0	0	0	0.18	0	0.18
50	0	0	0	0	0.24	0.24
p_V	0.12	0.18	0.12	0.34	0.24	1

Le densità marginali di U e V si ottengono sommando rispettivamente lungo le righe e lungo le colonne.

□

2.3 Valore atteso e varianza di una funzione di (X, Y)

Nel seguito capiterà spesso di dover calcolare valore atteso e varianza di una funzione di (X, Y):

$$h(X, Y).$$

Risulta dunque particolarmente utile il seguente risultato.

Teorema 2.4. *Siano (X, Y) un vettore aleatorio discreto e $h\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. Allora*

$$\mathbb{E}[h(X, Y)] \;=\; \sum_{i,j} h(x_i, y_j)\, p_{(X,Y)}(x_i, y_j)$$

e

$$\mathrm{Var}(h(X,Y)) = \mathbb{E}\big[\big(h(X,Y) - \mathbb{E}[h(X,Y)]\big)^2\big] = \sum_{i,j} \big(h(x_i,y_j) - \mathbb{E}[h(X,Y)]\big)^2\, p_{(X,Y)}(x_i, y_j).$$

Vale inoltre la formula

$$\mathrm{Var}(h(X,Y)) = \mathbb{E}\big[\big(h(X,Y)\big)^2\big] - \mathbb{E}[h(X,Y)]^2 = \sum_{i,j} (h(x_i,y_j))^2\, p_{(X,Y)}(x_i,y_j) - \mathbb{E}[h(X,Y)]^2.$$

Dalla formula del valore atteso di $h(X, Y)$ discendono i seguenti due risultati, riguardanti il valore atteso della somma e del prodotto di (X, Y), che corrispondono dunque ai casi in cui $h(x, y) = x + y$ e $h(x, y) = xy$. Il primo risultato, che riguarda appunto la somma di X e Y, esprime la proprietà di *linearità del valore atteso*.

Corollario 2.1. *Siano X e Y variabili aleatorie discrete. Siano inoltre a e b due numeri reali fissati. Allora*

$$\mathbb{E}[aX + bY] \;=\; a\mathbb{E}[X] + b\mathbb{E}[Y].$$

Dimostrazione. Applicando il Teorema 2.4 con $h(x, y) = ax + by$, si ottiene

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[aX + bY] \;&=\; \sum_{i,j} (ax_i + by_j)\, p_{(X,Y)}(x_i, y_j) \\
&=\; a\sum_{i,j} x_i\, p_{(X,Y)}(x_i, y_j) + b\sum_{i,j} y_j\, p_{(X,Y)}(x_i, y_j) \\
&=\; a\sum_i x_i \underbrace{\sum_j p_{(X,Y)}(x_i, y_j)}_{p_X(x_i)} + b\sum_j y_j \underbrace{\sum_i p_{(X,Y)}(x_i, y_j)}_{p_Y(y_j)} \\
&= a\sum_i x_i\, p_X(x_i) + b\sum_j y_j\, p_Y(y_j) \;=\; a\mathbb{E}[X] + b\mathbb{E}[Y].
\end{aligned}$$

□

Corollario 2.2. *Siano X e Y variabili aleatorie discrete. Se X e Y sono indipendenti allora*

$$\mathbb{E}[XY] \;=\; \mathbb{E}[X]\,\mathbb{E}[Y].$$

OSSERVAZIONE. *Si noti che, in generale, non vale il viceversa: se $\mathbb{E}[XY] = \mathbb{E}[X]\mathbb{E}[Y]$ non si può concludere che X e Y sono indipendenti.*

Dimostrazione. Applicando il Teorema 2.4 con $h(x, y) = xy$, si ottiene

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[XY] \;&=\; \sum_{i,j} x_i\, y_j\, p_{(X,Y)}(x_i, y_j) \\
&\underset{\substack{\uparrow\\ \text{indipendenza}}}{=} \sum_{i,j} x_i\, y_j\, p_X(x_i)\, p_Y(y_j) \\
&=\; \bigg(\sum_i x_i\, p_X(x_i)\bigg)\bigg(\sum_j y_j\, p_Y(y_j)\bigg) \;=\; \mathbb{E}[X]\,\mathbb{E}[Y].
\end{aligned}$$

□

2.4 Indici di sintesi della distribuzione di un vettore aleatorio discreto

La distribuzione o legge di un vettore aleatorio bidimensionale (X, Y) può essere descritta in maniera sintetica tramite le seguenti quantità:

$$\mathbb{E}[X], \qquad \mathbb{E}[Y], \qquad \mathrm{Var}(X), \qquad \mathrm{Var}(Y), \qquad \mathrm{Cov}(X, Y),$$

dove $\mathrm{Cov}(X, Y)$ è la *covarianza* di X e Y, che ora definiamo. Come vedremo la covarianza è una misura della "dipendenza" tra X e Y. Gli indicatori riportati sopra si scrivono spesso in forma vettoriale come segue:

$$\begin{aligned}
\textit{vettore delle medie} \;&=\; \big(\mathbb{E}[X], \mathbb{E}[Y]\big), \\
\textit{matrice delle covarianze} \;&=\; \begin{pmatrix} \mathrm{Var}(X) & \mathrm{Cov}(X, Y) \\ \mathrm{Cov}(Y, X) & \mathrm{Var}(X) \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Il nome "matrice delle covarianze" deriva dal fatto che anche gli elementi della diagonale, ovvero $\mathrm{Var}(X)$ e $\mathrm{Var}(Y)$, si possono scrivere in termini della covarianza; infatti, come vedremo, vale che: $\mathrm{Var}(X) = \mathrm{Cov}(X, X)$ e $\mathrm{Var}(Y) = \mathrm{Cov}(Y, Y)$. Infine, come vedremo, si ha che $\mathrm{Cov}(X, Y) = \mathrm{Cov}(Y, X)$, quindi la matrice delle covarianze è *simmetrica*.

Definizione 2.3. *Siano X e Y variabili aleatorie discrete. La* ***covarianza di** X **e** Y *è data da*

$$\mathrm{Cov}(X, Y) \;=\; \mathbb{E}\big[(X - \mathbb{E}[X])\,(Y - \mathbb{E}[Y])\big] \;=\; \sum_{i,j} (x_i - \mathbb{E}[X])\,(y_j - \mathbb{E}[Y])\, p_{(X,Y)}(x_i, y_j).$$

Se $\mathrm{Cov}(X, Y) = 0$, le variabili aleatorie X e Y si dicono ***scorrelate****.*

Osservazione 1. *Si noti che la covarianza di X e Y è definita come il valore atteso della variabile aleatoria $h(X,Y)$, dove*

$$h(x,y) \;=\; (x-\mathbb{E}[X])\,(y-\mathbb{E}[Y]).$$

Quindi la seconda uguaglianza nella Definizione 2.3 di covarianza è una conseguenza del Teorema 2.4.

Osservazione 2. *Si noti che*

$$\mathrm{Cov}(X,X) \;=\; \mathrm{Var}(X).$$

Osservazione 3. *Si noti che la covarianza è* simmetrica

$$\mathrm{Cov}(X,Y) \;=\; \mathrm{Cov}(Y,X).$$

Per calcolare la covarianza di X e Y è utile la seguente formula.

Teorema 2.5. *Siano X e Y variabili aleatorie discrete. Vale che*

$$\mathrm{Cov}(X,Y) \;=\; \mathbb{E}[XY]-\mathbb{E}[X]\,\mathbb{E}[Y] \;=\; \sum_{i,j} x_i\, y_j\, p_{(X,Y)}(x_i,y_j)-\mathbb{E}[X]\,\mathbb{E}[Y].$$

Quindi se le variabili aleatorie X e Y sono indipendenti allora sono scorrelate.

Dimostrazione. Dimostriamo la prima uguaglianza, dato che la seconda è una conseguenza del Teorema 2.4.
Per definizione, si ha che

$$\mathrm{Cov}(X,Y) \;=\; \mathbb{E}\big[(X-\mathbb{E}[X])\,(Y-\mathbb{E}[Y])\big] \;=\; \mathbb{E}\big[XY - X\,\mathbb{E}[Y]-\mathbb{E}[X]\,Y+\mathbb{E}[X]\,\mathbb{E}[Y]\big].$$

Dalla linearità del valore atteso, si ottiene (si noti che $\mathbb{E}[X]$ e $\mathbb{E}[Y]$ sono costanti)

$$\mathrm{Cov}(X,Y) \;=\; \mathbb{E}[XY]-\mathbb{E}[X]\,\mathbb{E}[Y]-\mathbb{E}[X]\,\mathbb{E}[Y]+\mathbb{E}[X]\,\mathbb{E}[Y] \;=\; \mathbb{E}[XY]-\mathbb{E}[X]\,\mathbb{E}[Y].$$

Infine se le variabili aleatorie X e Y sono indipendenti allora dal Corollario 2.2 si ha che

$$\mathbb{E}[XY] \;=\; \mathbb{E}[X]\,\mathbb{E}[Y],$$

quindi $\mathrm{Cov}(X,Y)=0$, ovvero X e Y sono scorrelate. □

La covarianza interviene nella formula della varianza di $X+Y$.

Teorema 2.6. *Siano X e Y variabili aleatorie discrete. Vale che*

$$\mathrm{Var}(X+Y) \;=\; \mathrm{Var}(X)+\mathrm{Var}(Y)+2\,\mathrm{Cov}(X,Y).$$

Quindi se X e Y sono scorrelate vale che

$$\mathrm{Var}(X+Y) \;=\; \mathrm{Var}(X)+\mathrm{Var}(Y).$$

Dimostrazione. Applicando il Teorema 2.4 con $h(x, y) = x + y$, si ottiene

$$\begin{aligned}\mathrm{Var}(X+Y) &= \mathbb{E}\big[\big(X+Y-\mathbb{E}[X+Y]\big)^2\big] = \mathbb{E}\big[\big(X+Y-\mathbb{E}[X]-\mathbb{E}[Y]\big)^2\big] \\ &= \mathbb{E}\big[\big(X-\mathbb{E}[X]\big)^2 + \big(Y-\mathbb{E}[Y]\big)^2 + 2\big(X-\mathbb{E}[X]\big)\big(Y-\mathbb{E}[Y]\big)\big] \\ &= \mathrm{Var}(X) + \mathrm{Var}(Y) + 2\,\mathrm{Cov}(X,Y).\end{aligned}$$

□

Osservazione. *La covarianza è un indicatore di dipendenza tra due variabili aleatorie X e Y. Più precisamente, supponiamo*[3] *che* $\mathrm{Var}(X) > 0$ *e* $\mathrm{Var}(Y) > 0$. *In tal caso, ha senso definire il* **coefficiente di correlazione**

$$\rho_{X,Y} = \frac{\mathrm{Cov}(X,Y)}{\sqrt{\mathrm{Var}(X)}\,\sqrt{\mathrm{Var}(Y)}}.$$

Si può dimostrare che

$$-1 \le \rho_{X,Y} \le 1.$$

Ricordiamo che se $\mathrm{Cov}(X,Y) = 0$ *allora X e Y si dicono* scorrelate. *Si noti che* $\mathrm{Cov}(X,Y) = 0$ *equivale a* $\rho_{X,Y} = 0$. *Al contrario, quando la correlazione è massima in valore assoluto (quindi $\rho_{X,Y} = -1$ oppure $\rho_{X,Y} = 1$), si ha che*

$$\rho_{X,Y} = \pm 1 \qquad \Longleftrightarrow \qquad Y = a\,X + b.$$

Più precisamente, $\rho_{X,Y} = \pm 1$ se e solo se esistono due costanti $a \neq 0$ e $b \in \mathbb{R}$ tali che $Y = a\,X + b$. La correlazione misura dunque se esiste tra X e Y una dipendenza di tipo lineare. *Quindi quando X e Y sono scorrelate (*$\mathrm{Cov}(X,Y) = 0$*) significa solamente che non esiste una dipendenza lineare tra X e Y. Ricordiamo invece che se X e Y sono indipendenti allora non esiste alcuna dipendenza funzionale tra X e Y (non solo di tipo lineare). Perciò se sappiamo solamente che* $\mathrm{Cov}(X,Y) = 0$ *non possiamo dire che X e Y sono indipendenti. Riassumendo:*

$$X \perp\!\!\!\perp Y \qquad \Longrightarrow \qquad \mathrm{Cov}(X,Y) = 0,$$

invece

$$X \perp\!\!\!\perp Y \qquad \not\Longleftarrow \qquad \mathrm{Cov}(X,Y) = 0.$$

Esercizio 2.3. *Siano X ed Y variabili aleatorie discrete indipendenti entrambe con distribuzione di Bernoulli di parametro $p = \frac{1}{2}$, quindi*

$$X \sim B\big(\tfrac{1}{2}\big), \qquad Y \sim B\big(\tfrac{1}{2}\big), \qquad X \perp\!\!\!\perp Y.$$

Siano $U = X + Y$ e $V = |X - Y|$.

(a) *Determinare la densità discreta congiunta di U e V e le densità marginali.*

(b) *Calcolare la probabilità che V sia minore di U.*

[3]Ricordiamo che $\mathrm{Var}(X) > 0$ se e solo se X non è *costante*.

(c) *Calcolare la varianza di U, la varianza di V e la covarianza di U e V.*

(d) *U e V sono indipendenti?*

Soluzione.

(a) Notiamo che

$X \backslash Y$	0	1	p_X
0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$
1	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$
p_Y	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1

Per quanto riguarda U e V, si ha $\mathcal{S}_U = \{0, 1, 2\}$ e $\mathcal{S}_V = \{0, 1\}$. Inoltre

$$
\begin{aligned}
p_{(U,V)}(0,0) &= p_{(X,Y)}(0,0) = \frac{1}{4}, \\
p_{(U,V)}(0,1) &= 0, \\
p_{(U,V)}(1,0) &= 0, \\
p_{(U,V)}(1,1) &= p_{(X,Y)}(0,1) + p_{(X,Y)}(1,0) = \frac{1}{2}, \\
p_{(U,V)}(2,0) &= p_{(X,Y)}(1,1) = \frac{1}{4}, \\
p_{(U,V)}(2,1) &= 0.
\end{aligned}
$$

Quindi

$U \backslash V$	0	1	p_U
0	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{4}$
1	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
2	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{4}$
p_V	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1

Le densità marginali di U e V si ottengono sommando rispettivamente lungo le righe e lungo le colonne.

(b) Per la formula (2.1), si ha che

$$\mathbb{P}(V < U) = \sum_{v_j < u_i} p_{(U,V)}(u_i, v_j).$$

Le coppie (u_i, v_j) che verificano la condizione $v_j < u_i$ sono: $(1,0)$, $(2,0)$, $(2,1)$. Quindi

$$\mathbb{P}(V < U) = p_{(U,V)}(1,0) + p_{(U,V)}(2,0) + p_{(U,V)}(2,1) = p_{(U,V)}(2,0) = \frac{1}{4}.$$

(c) Iniziamo col calcolare $\mathbb{E}[U]$ e $\mathbb{E}[U^2]$:

$$\mathbb{E}[U] = 0 \times \frac{1}{4} + 1 \times \frac{1}{2} + 2 \times \frac{1}{4} = 1,$$

$$\mathbb{E}[U^2] \;=\; 0^2 \times \frac{1}{4} + 1^2 \times \frac{1}{2} + 2^2 \times \frac{1}{4} \;=\; \frac{3}{2}.$$

Quindi

$$\mathrm{Var}(U) \;=\; \mathbb{E}[U^2] - \mathbb{E}[U]^2 \;=\; \frac{1}{2}.$$

Per quanto riguarda V, si può procedere come per U, oppure notare che $V \sim B(1/2)$, quindi

$$\mathrm{Var}(V) \;=\; \frac{1}{4}.$$

Resta da determinare $\mathrm{Cov}(U, V)$. Iniziamo col calcolare $\mathbb{E}[UV]$:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[UV] \;&=\; \sum_{i,j} u_i\, v_j\, p_{(U,V)}(u_i, v_j) \\
&=\; 0 \times 0 \times \frac{1}{4} + 0 \times 1 \times 0 + 1 \times 0 \times 0 + 1 \times 1 \times \frac{1}{2} + 2 \times 0 \times \frac{1}{4} + 2 \times 1 \times 0 \\
&=\; \frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

Quindi (si noti che $\mathbb{E}[V] = 1/2$)

$$\mathrm{Cov}(U, V) \;=\; \mathbb{E}[UV] - \mathbb{E}[U]\,\mathbb{E}[V] \;=\; 0.$$

Quindi le variabili aleatorie U e V sono *scorrelate.*

(d) No, infatti, ad esempio, $p_{(U,V)}(0, 1) \;\neq\; p_U(0)\, p_V(1)$. Quindi U e V non possono essere indipendenti per il Teorema 2.3. (A conferma della non indipendenza di U e V, notiamo che esiste una dipendenza funzionale tra queste due variabili aleatorie, infatti: $V = U \mod 2$)

$\square$