

CALCOLO DELLE PROBABILITÀ E STATISTICA 2021/2022

VARIABILI ALEATORIE
INTRODUZIONE GENERALE



ALMA MATER STUDIORUM
UNIVERSITÀ DI BOLOGNA

1 Introduzione

In questo capitolo studiamo una delle nozioni più importanti del Calcolo delle probabilità, ossia la nozione di *variabile aleatoria*. Per introdurla, procediamo come per la nozione di *evento*, quindi diamo prima una definizione come *affermazione* e successivamente forniamo la corrispondente rappresentazione matematica nell'ambito del modello probabilistico dell'esperimento aleatorio. A tal proposito, è utile richiamare quanto già visto riguardo la nozione di evento.

Definizione 1.1. *Un **evento** è un'affermazione riguardante l'ipotetico risultato dell'esperimento aleatorio, di cui è possibile dire con certezza se è vera oppure falsa una volta noto l'esito dell'esperimento aleatorio.*

Un evento viene solitamente indicato con una lettera maiuscola dell'alfabeto. Spesso si utilizzano le prime lettere dell'alfabeto: A, B, C, \dots

Definizione 1.2. *Ogni **evento** (inteso come affermazione) è rappresentato dal sottoinsieme di Ω costituito dai casi favorevoli, ovvero dagli esiti per cui l'evento è vero (è rappresentato dall'insieme vuoto \emptyset se è sempre falso).*

*Un qualunque sottoinsieme di Ω lo chiameremo ancora **evento**.*

Veniamo dunque alla nozione di *variabile aleatoria*.

Definizione 1.3. *Una **variabile aleatoria** (anche detta **numero aleatorio** oppure, in forma abbreviata, **v.a.**) è un'affermazione riguardante l'ipotetico risultato dell'esperimento aleatorio. Tale affermazione identifica uno e un solo numero reale una volta noto l'esito dell'esperimento aleatorio.*

OSSERVAZIONE. *In altre parole, mentre per un evento ha senso domandarsi “è vero oppure no?”, per una variabile aleatoria ha senso chiedersi “quanto vale?”.*

Una variabile aleatoria viene solitamente indicata con una lettera maiuscola dell'alfabeto. Spesso si utilizzano le ultime lettere dell'alfabeto: $\dots X, Y, Z$.

Definizione 1.4. Ogni *variabile aleatoria* (intesa come affermazione) è rappresentata dalla funzione da Ω in \mathbb{R} il cui valore numerico, in corrispondenza di un qualunque esito dell'esperimento aleatorio, coincide con quanto fornito dall'affermazione.

Una qualunque^a funzione da Ω in \mathbb{R} la chiameremo ancora *variabile aleatoria*.

^aAnche se noi non considereremo questa eventualità, ricordiamo che a volte è necessario definire la probabilità \mathbb{P} solamente su una sotto-famiglia \mathcal{F} di sottoinsiemi di Ω (anziché su tutto l'insieme delle parti $\mathcal{P}(\Omega)$). In questo caso, non tutte le funzioni da Ω in \mathbb{R} sono variabili aleatorie, ma solo le funzioni $X: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ che verificano la proprietà che ora enunciamo. Sia \mathcal{I} un intervallo di \mathbb{R} , quindi \mathcal{I} è uguale ad uno dei seguenti insiemi:

$$[a, b], \quad [a, b), \quad (a, b], \quad (a, b), \quad (-\infty, b], \quad (-\infty, b), \quad [a, +\infty), \quad (a, +\infty).$$

Allora la funzione $X: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ è una variabile aleatoria se vale che

$$\{\omega \in \Omega: X(\omega) \in \mathcal{I}\} \in \mathcal{F}$$

per ogni intervallo \mathcal{I} di \mathbb{R} . Se X verifica questa proprietà si dice che è una funzione \mathcal{F} -misurabile. Nel nostro caso, essendo $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$, questa proprietà è automaticamente verificata.

OSSERVAZIONE. Il termine “variabile aleatoria” lo useremo dunque indistintamente per indicare sia l'affermazione che la funzione. Questo non crea ambiguità, dato che la funzione rappresenta appunto l'affermazione. Per tale ragione, nel seguito indicheremo entrambi con lo stesso simbolo (tipicamente una lettera maiuscola dell'alfabeto), come accade nell'esempio seguente in cui le lettere maiuscole X, Y, Z indicano sia l'affermazione che la funzione.

Esempio 1.1. Si lanciano due dadi. Consideriamo le variabili aleatorie

$$\begin{aligned} X &= \text{“somma dei due risultati”}, \\ Y &= \text{“prodotto dei due risultati”}, \\ Z &= \text{“risultato del lancio del primo dado”}. \end{aligned}$$

Uno spazio campionario naturale per questo esperimento aleatorio è l'insieme

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}^2 = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), \dots, (4, 6), (5, 6), (6, 6)\}.$$

Dunque le variabili aleatorie X, Y, Z sono rappresentate rispettivamente dalle funzioni $X: \Omega \rightarrow \mathbb{R}, Y: \Omega \rightarrow \mathbb{R}, Z: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ date da^a

$$\begin{aligned} X(\omega_1, \omega_2) &= \omega_1 + \omega_2, & \forall (\omega_1, \omega_2) \in \Omega, \\ Y(\omega_1, \omega_2) &= \omega_1 \cdot \omega_2, & \forall (\omega_1, \omega_2) \in \Omega, \\ Z(\omega_1, \omega_2) &= \omega_1, & \forall (\omega_1, \omega_2) \in \Omega. \end{aligned}$$

^aSi noti che in questo caso il generico elemento ω dello spazio campionario Ω è dato da una coppia ordinata $\omega = (\omega_1, \omega_2)$.

Variabili aleatorie costanti. Una variabile aleatoria X si dice *costante* se assume sempre lo stesso valore numerico qualunque sia l'esito dell'esperimento aleatorio. In tal caso, se indichiamo con a il valore numerico assunto dalla variabile aleatoria, allora X è la seguente funzione:

$$X(\omega) = a, \quad \forall \omega \in \Omega.$$

Nel seguito indicheremo la variabile aleatoria X semplicemente con a , ovvero a denoterà sia una costante sia una variabile aleatoria (la variabile aleatoria costante uguale ad a stessa).

Variabili aleatorie indicatrici. Un caso particolarmente interessante di variabile aleatoria è quello di *variabile aleatoria indicatrice*. Più precisamente, dato un qualunque evento $A \subset \Omega$ possiamo associare ad esso la variabile aleatoria seguente:

$$X = \text{“vale 1 se } A \text{ si verifica, vale 0 altrimenti”}.$$

Dunque X è rappresentata dalla funzione $X: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ data da

$$X(\omega) = \begin{cases} 1, & \text{se } \omega \in A, \\ 0, & \text{se } \omega \notin A. \end{cases}$$

Nel seguito indicheremo tale funzione con il simbolo 1_A , ovvero

$$X(\omega) = 1_A(\omega), \quad \forall \omega \in \Omega.$$

OSSERVAZIONE. *Dato che 1_A contiene tutta l'informazione riguardante l'evento A (infatti se conosciamo il valore di 1_A sappiamo se A si è verificato oppure no), possiamo affermare che la nozione di variabile aleatoria è una “generalizzazione” della nozione di evento.*

2 Distribuzione o legge di una variabile aleatoria

2.1 Eventi associati ad una variabile aleatoria

Abbiamo visto che ad ogni evento A è possibile associare una variabile aleatoria, ovvero $X = 1_A$, la variabile aleatoria indicatrice relativa all'evento A . Sia ora X una *generica* variabile aleatoria. Quali sono gli eventi “associati” ad X ? Intuitivamente, gli eventi associati ad X sono *tutti e soli gli eventi di cui è possibile dire con certezza se sono veri oppure falsi una volta noto il valore che la variabile aleatoria X ha assunto*. Vediamo ora di descriverli in termini matematici. A tal proposito, è utile il seguente esempio.

Esempio 2.1. *Si lanciano due dadi. Consideriamo la variabile aleatoria*

$$X = \text{“somma dei due risultati”}$$

Intuitivamente, gli eventi associati ad X sono tutti e soli gli eventi riguardanti la somma dei due risultati. Ad esempio:

$$\begin{aligned} E_1 &= \text{“la somma è uguale a 3”}, \\ E_2 &= \text{“la somma è } \leq 5 \text{”}, \\ E_3 &= \text{“la somma è un numero pari”}. \end{aligned}$$

Notiamo che tali eventi possono essere scritti nel modo seguente:

$$\begin{aligned} E_1 &= \{\omega \in \Omega: X(\omega) = 3\}, \\ E_2 &= \{\omega \in \Omega: X(\omega) \leq 5\}, \\ E_3 &= \{\omega \in \Omega: X(\omega) \in \{2, 4, 6, 8, 10, 12\}\}. \end{aligned}$$

Anche E_1 ed E_2 possono essere scritti nella stessa forma di E_3 , infatti:

$$\begin{aligned} E_1 &= \{\omega \in \Omega: X(\omega) \in \{3\}\}, \\ E_2 &= \{\omega \in \Omega: X(\omega) \in (-\infty, 5]\}. \end{aligned}$$

Si noti che E_2 può anche essere scritto come segue (se teniamo conto che in questo esempio specifico la v.a. X assume solo i valori interi 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12):

$$E_2 = \{\omega \in \Omega: X(\omega) \in \{2, 3, 4, 5\}\}.$$

In conclusione, esistono tre sottoinsiemi B_1, B_2, B_3 dell'insieme dei numeri reali \mathbb{R} tali che

$$\begin{aligned} E_1 &= \{\omega \in \Omega: X(\omega) \in B_1\}, \\ E_2 &= \{\omega \in \Omega: X(\omega) \in B_2\}, \\ E_3 &= \{\omega \in \Omega: X(\omega) \in B_3\}. \end{aligned}$$

Diamo dunque la definizione di *evento associato ad (o generato da) una variabile aleatoria*.

Definizione 2.1. Sia (Ω, \mathbb{P}) uno spazio di probabilità e $X: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ una variabile aleatoria. Si dice che $E \subset \Omega$ è un **evento associato ad** (o **generato da**) X se esiste un sottoinsieme B dell'insieme dei numeri reali \mathbb{R} tale che

$$\begin{aligned} E &= \{\omega \in \Omega: X(\omega) \in B\} \\ &= \text{“sottoinsieme di } \Omega \text{ costituito da tutti e soli gli esiti } \omega \text{ per cui } X(\omega) \in B\text{”}. \end{aligned}$$

Viceversa, dato un qualunque $B \subset \mathbb{R}$, il sottoinsieme di Ω dato da

$$\{\omega \in \Omega: X(\omega) \in B\}$$

si chiama **evento associato ad** (o **generato da**) X .

Per brevità, indicheremo il sottoinsieme

$$\{\omega \in \Omega: X(\omega) \in B\}$$

nel modo seguente:

$$\{X \in B\}.$$

OSSERVAZIONE 1. Se $B = \emptyset$ oppure $B = \mathbb{R}$, otteniamo

$$\{X \in \emptyset\} = \emptyset, \quad \{X \in \mathbb{R}\} = \Omega.$$

OSSERVAZIONE 2. Spesso l'insieme B sarà un intervallo (o, più in un generale, un'unione di intervalli). Si noti che anche un insieme contenente un unico numero reale è un intervallo (si chiama intervallo degenere, in cui gli estremi coincidono). In questi casi, scriveremo:

$$\begin{aligned} \{X \in \{x\}\} &= \{X = x\} \\ \{X \in (-\infty, x)\} &= \{X < x\} \\ \{X \in (-\infty, x]\} &= \{X \leq x\} \\ \{X \in (x, +\infty)\} &= \{X > x\} \\ \{X \in [x, +\infty)\} &= \{X \geq x\} \\ \{X \in (x, y)\} &= \{x < X < y\} \\ \{X \in [x, y)\} &= \{x \leq X < y\} \\ \{X \in (x, y]\} &= \{x < X \leq y\} \\ \{X \in [x, y]\} &= \{x \leq X \leq y\} \end{aligned}$$

OSSERVAZIONE 3. La probabilità di un evento generato da X , quindi

$$\mathbb{P}(\{X \in B\}),$$

verrà scritta, per semplicità di notazione,

$$\mathbb{P}(X \in B).$$

Esempio 2.2. Siano (Ω, \mathbb{P}) uno spazio di probabilità, a un numero reale ed A un evento. Determinare gli eventi generati dalle seguenti variabili aleatorie:

1) $X(\omega) = a, \forall \omega \in \Omega;$

2) $X = 1_A.$

Soluzione.

1) Sia B un sottoinsieme di \mathbb{R} . Distinguiamo due casi:

- se $a \in B$ allora $\{X \in B\} = \Omega;$
- se $a \notin B$ allora $\{X \in B\} = \emptyset.$

Quindi

$$\{X \in B\} = \begin{cases} \Omega, & \text{se } a \in B, \\ \emptyset, & \text{se } a \notin B. \end{cases}$$

2) Sia B un sottoinsieme di \mathbb{R} . Distinguiamo quattro casi:

- se $1 \in B$ e $0 \notin B$ allora $\{X \in B\} = A;$
- se $1 \notin B$ e $0 \in B$ allora $\{X \in B\} = A^c;$
- se $1 \in B$ e $0 \in B$ allora $\{X \in B\} = \Omega;$
- se $1 \notin B$ e $0 \notin B$ allora $\{X \in B\} = \emptyset.$

Quindi

$$\{X \in B\} = \begin{cases} A, & \text{se } 1 \in B \text{ e } 0 \notin B, \\ A^c, & \text{se } 1 \notin B \text{ e } 0 \in B, \\ \Omega, & \text{se } 1 \in B \text{ e } 0 \in B, \\ \emptyset, & \text{se } 1 \notin B \text{ e } 0 \notin B. \end{cases}$$

□

Esercizio 2.1. Siano (Ω, \mathbb{P}) uno spazio di probabilità, X una variabile aleatoria e x un numero reale. Mostrare che

$$\mathbb{P}(X \leq x) = \mathbb{P}(X < x) + \mathbb{P}(X = x).$$

Soluzione. Notiamo che

$$\{X \leq x\} = \{X < x\} \cup \{X = x\}.$$

Dato che gli insiemi

$$\begin{aligned} \{X < x\} &= \{\omega \in \Omega: X(\omega) < x\} \\ \{X = x\} &= \{\omega \in \Omega: X(\omega) = x\} \end{aligned}$$

sono *disgiunti* (infatti non esiste alcun ω per cui valgono simultaneamente $X(\omega) < x$ e $X(\omega) = x$), per l'additività della probabilità si ottiene

$$\mathbb{P}(X \leq x) = \mathbb{P}(X < x) + \mathbb{P}(X = x).$$

□

2.2 Distribuzione o legge di una variabile aleatoria

Ad ogni variabile aleatoria X è associato un oggetto di fondamentale importanza, la *distribuzione* o *legge* di X , che verrà indicata con \mathbb{P}_X . Essa è una probabilità su \mathbb{R} .

Definizione 2.2. Sia (Ω, \mathbb{P}) uno spazio di probabilità e $X: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ una variabile aleatoria. Si chiama **distribuzione** o **legge** di X la probabilità^a

$$\mathbb{P}_X: \mathcal{P}(\mathbb{R}) \rightarrow [0, 1]$$

definita da

$$\mathbb{P}_X(B) = \mathbb{P}(X \in B), \quad \forall B \subset \mathbb{R}.$$

Per dire che X ha distribuzione o legge \mathbb{P}_X scriveremo

$$X \sim \mathbb{P}_X.$$

^aRicordiamo che $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ è l'insieme delle parti di \mathbb{R} .

OSSERVAZIONE. Si noti che andrebbe verificato che \mathbb{P}_X è effettivamente una probabilità, ovvero che \mathbb{P}_X verifica gli ASSIOMI I-II-III.

Variabili aleatorie costanti e delta di Dirac. Sia X la variabile aleatoria costante data da:

$$X(\omega) = a, \quad \forall \omega \in \Omega,$$

dove a è un numero reale fissato. Possiamo calcolare esplicitamente la distribuzione di X , infatti, per ogni $B \subset \mathbb{R}$,

$$\mathbb{P}_X(B) = \mathbb{P}(X \in B) = \begin{cases} \mathbb{P}(\Omega), & \text{se } a \in B, \\ \mathbb{P}(\emptyset), & \text{se } a \notin B, \end{cases} = \begin{cases} 1, & \text{se } a \in B, \\ 0, & \text{se } a \notin B. \end{cases}$$

Notiamo che \mathbb{P}_X coincide con δ_a , la *delta di Dirac in a* .

Variabili aleatorie indicatrici. Siano A un evento e $X = 1_A$, la variabile aleatoria indicatrice relativa all'evento A . Anche in questo caso possiamo calcolare in maniera esplicita la distribuzione di X . Infatti, per ogni $B \subset \mathbb{R}$,

$$\{X \in B\} = \begin{cases} A, & \text{se } 1 \in B \text{ e } 0 \notin B, \\ A^c, & \text{se } 1 \notin B \text{ e } 0 \in B, \\ \Omega, & \text{se } 1 \in B \text{ e } 0 \in B, \\ \emptyset, & \text{se } 1 \notin B \text{ e } 0 \notin B. \end{cases}$$

Quindi

$$\mathbb{P}_X(B) = \mathbb{P}(X \in B) = \begin{cases} \mathbb{P}(A), & \text{se } 1 \in B \text{ e } 0 \notin B, \\ \mathbb{P}(A^c), & \text{se } 1 \notin B \text{ e } 0 \in B, \\ \mathbb{P}(\Omega), & \text{se } 1 \in B \text{ e } 0 \in B, \\ \mathbb{P}(\emptyset), & \text{se } 1 \notin B \text{ e } 0 \notin B. \end{cases}$$

Dato che $\mathbb{P}(A^c) = 1 - \mathbb{P}(A)$, $\mathbb{P}(\Omega) = 1$ e $\mathbb{P}(\emptyset) = 0$, si ottiene

$$\mathbb{P}_X(B) = \begin{cases} \mathbb{P}(A), & \text{se } 1 \in B \text{ e } 0 \notin B, \\ 1 - \mathbb{P}(A), & \text{se } 1 \notin B \text{ e } 0 \in B, \\ 1, & \text{se } 1 \in B \text{ e } 0 \in B, \\ 0, & \text{se } 1 \notin B \text{ e } 0 \notin B. \end{cases}$$

In altri termini, si ha che \mathbb{P}_X coincide con la seguente combinazione convessa di δ_0 e δ_1 : $(1 - \mathbb{P}(A)) \delta_0 + \mathbb{P}(A) \delta_1$. Quindi

$$X \sim (1 - \mathbb{P}(A)) \delta_0 + \mathbb{P}(A) \delta_1.$$

Infatti, per ogni $B \subset \mathbb{R}$,

$$(1 - \mathbb{P}(A)) \delta_0(B) + \mathbb{P}(A) \delta_1(B) = \begin{cases} \mathbb{P}(A), & \text{se } 1 \in B \text{ e } 0 \notin B, \\ 1 - \mathbb{P}(A), & \text{se } 1 \notin B \text{ e } 0 \in B, \\ 1, & \text{se } 1 \in B \text{ e } 0 \in B, \\ 0, & \text{se } 1 \notin B \text{ e } 0 \notin B. \end{cases}$$

Questo dimostra che $\mathbb{P}_X = (1 - \mathbb{P}(A)) \delta_0 + \mathbb{P}(A) \delta_1$. Tale probabilità si chiama *distribuzione di Bernoulli di parametro* $\mathbb{P}(A)$.

2.3 Funzione di ripartizione o CDF

La distribuzione di una variabile aleatoria X contiene tutte le informazioni essenziali riguardanti X stessa. Tuttavia \mathbb{P}_X è un oggetto piuttosto complicato, infatti è una funzione $\mathbb{P}_X: \mathcal{P}(\mathbb{R}) \rightarrow [0, 1]$. Ciò nonostante, grazie al fatto che \mathbb{P}_X è una probabilità sui sottoinsiemi dell'*insieme dei numeri reali* \mathbb{R} , è possibile caratterizzare \mathbb{P}_X in modo più semplice. Infatti si può dimostrare che se si conosce il valore di \mathbb{P}_X sugli *intervalli* di \mathbb{R} allora si può ricavare il valore che \mathbb{P}_X assume in corrispondenza di qualunque altro sottoinsieme $B \subset \mathbb{R}$. Più precisamente, è sufficiente considerare una particolare famiglia di intervalli di \mathbb{R} , ovvero quelli della forma

$$(-\infty, x], \quad \text{per ogni } x \in \mathbb{R}.$$

In altre parole, si può dimostrare che se si conosce il valore di \mathbb{P}_X in corrispondenza di ciascun intervallo¹ $(-\infty, x]$ allora è possibile ricavare tutti i valori di probabilità $\mathbb{P}_X(B)$,

¹Tale risultato vale anche se al posto della classe di intervalli $(-\infty, x]$ si considera un'altra classe di intervalli, ad esempio quelli della forma $(-\infty, x)$ oppure $[x, +\infty)$ oppure $(x, +\infty)$ oppure $[x, y]$ e così via.

per ogni $B \subset \mathbb{R}$. In conclusione, conoscere $\mathbb{P}_X(B)$, per ogni $B \subset \mathbb{R}$, è equivalente a conoscere $\mathbb{P}_X((-\infty, x])$, per ogni $x \in \mathbb{R}$. Poniamo

$$F_X(x) := \mathbb{P}_X((-\infty, x]), \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Possiamo dunque affermare che conoscere la funzione F_X è equivalente a conoscere \mathbb{P}_X . La funzione F_X si chiama *funzione di ripartizione* o *funzione di distribuzione cumulativa* o *CDF*².

Definizione 2.3. Sia (Ω, \mathbb{P}) uno spazio di probabilità e $X: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ una variabile aleatoria. Si chiama **funzione di ripartizione** o **funzione di distribuzione cumulativa** o **CDF** di X la funzione

$$F_X: \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$$

definita da

$$F_X(x) = \mathbb{P}(X \leq x) = \mathbb{P}_X((-\infty, x]), \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Per dire che X ha funzione di ripartizione F_X scriveremo

$$X \sim F_X.$$

OSSERVAZIONE. Come già osservato precedentemente, F_X determina completamente la distribuzione di X :

- se conosco \mathbb{P}_X allora conosco F_X (questo segue direttamente dalla definizione di F_X),
- ma vale anche il viceversa, cioè se conosco F_X allora conosco $\mathbb{P}_X(B)$ per ogni sottoinsieme B di \mathbb{R} (omettiamo la dimostrazione di questo risultato).

Variabili aleatorie costanti. Sia a un numero reale e X la variabile aleatoria costante uguale ad a . Allora

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & x < a, \\ 1, & x \geq a. \end{cases}$$

Variabili aleatorie indicatrici. Sia A un evento e $X = 1_A$. Allora

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ 1 - \mathbb{P}(A), & 0 \leq x < 1, \\ 1, & x \geq 1. \end{cases}$$

Come affermato nel seguente teorema, la funzione di ripartizione verifica certe proprietà che sono caratterizzanti, ovvero se una funzione verifica queste proprietà allora è necessariamente la funzione di ripartizione di una qualche variabile aleatoria.

²Dall'inglese *cumulative distribution function* (funzione di distribuzione cumulativa).

Teorema 2.1. Sia (Ω, \mathbb{P}) uno spazio di probabilità e $X: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ una variabile aleatoria. La funzione di ripartizione F_X di X verifica le seguenti proprietà:

- 1) F_X è monotona crescente (non necessariamente strettamente).
- 2) F_X è continua a destra: $\lim_{y \rightarrow x^+} F_X(y) = F_X(x)$ per ogni $x \in \mathbb{R}$.
- 3) $\lim_{x \rightarrow -\infty} F_X(x) = 0$.
- 4) $\lim_{x \rightarrow +\infty} F_X(x) = 1$.

Viceversa, se una funzione $G: \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$ verifica le proprietà 1)-2)-3)-4) allora esistono uno spazio di probabilità (Ω, \mathbb{P}) ed una variabile aleatoria X tale che $G = F_X$.

Dimostrazione. Dimostriamo rigorosamente solo la proprietà 1). Siano $x \leq y$, dobbiamo mostrare che

$$F_X(x) \leq F_X(y).$$

Si ha che

$$F_X(x) = \mathbb{P}(X \leq x) \stackrel{\{X \leq x\} \subset \{X \leq y\}}{\leq} \mathbb{P}(X \leq y) = F_X(y).$$

\uparrow
 monotonia di \mathbb{P}

Per quanto riguarda la proprietà 2), intuitivamente abbiamo che

$$\lim_{y \rightarrow x^+} F_X(y) = \lim_{y \rightarrow x^+} \mathbb{P}(X \leq y) = \mathbb{P}(X \leq x).$$

Infine, per quanto riguarda le proprietà 3) e 4), intuitivamente abbiamo che

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} F_X(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \mathbb{P}(X \leq x) = \mathbb{P}(X \leq -\infty) = 0$$

e, analogamente,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} F_X(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(X \leq x) = \mathbb{P}(X < +\infty) = 1.$$

□

N.B. Per la proprietà 2) del Teorema 2.1, per ogni $x \in \mathbb{R}$ il limite da destra di F_X in x esiste ed è pari a

$$\lim_{y \rightarrow x^+} F_X(y) = F_X(x) = \mathbb{P}(X \leq x).$$

Si può dimostrare che anche il limite da sinistra di F_X in x esiste sempre ed è dato da

$$\lim_{y \rightarrow x^-} F_X(y) = \mathbb{P}(X < x).$$

Nel seguito indicheremo $\lim_{y \rightarrow x^-} F_X(y)$ con $F_X(x-)$. Quindi

$$F_X(x-) = \mathbb{P}(X < x).$$

OSSERVAZIONE. La funzione F_X è continua in x se e solo se

$$\lim_{y \rightarrow x^-} F_X(y) = \lim_{y \rightarrow x^+} F_X(y),$$

ovvero

$$F_X(x-) = F_X(x).$$

Poiché $F_X(x-) = \mathbb{P}(X < x)$ e $F_X(x) = \mathbb{P}(X \leq x)$, segue che F_X è continua in x se e solo se

$$\mathbb{P}(X < x) = \mathbb{P}(X \leq x)$$

ovvero (ricordando la formula $\mathbb{P}(X \leq x) = \mathbb{P}(X < x) + \mathbb{P}(X = x)$ dell'Esercizio 2.1)

$$\mathbb{P}(X = x) = 0.$$

Grazie all'osservazione precedente, abbiamo il seguente risultato che permette di esprimere in termini di F_X la probabilità che X appartenga ad un certo intervallo (eventualmente degenere, quindi dato da un punto).

Teorema 2.2 (Probabilità di intervalli in termini di F_X).

Valgono le seguenti uguaglianze:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X = x) &= \mathbb{P}(X \leq x) - \mathbb{P}(X < x) = F_X(x) - F_X(x-) \\ \mathbb{P}(x < X \leq y) &= \mathbb{P}(X \leq y) - \mathbb{P}(X \leq x) = F_X(y) - F_X(x) \\ \mathbb{P}(x \leq X \leq y) &= \mathbb{P}(X \leq y) - \mathbb{P}(X < x) = F_X(y) - F_X(x-) \\ \mathbb{P}(x \leq X < y) &= \mathbb{P}(X < y) - \mathbb{P}(X < x) = F_X(y-) - F_X(x-) \\ \mathbb{P}(x < X < y) &= \mathbb{P}(X < y) - \mathbb{P}(X \leq x) = F_X(y-) - F_X(x)\end{aligned}$$