ANALISI MATEMATICA. INFORMATICA SECONDO MODULO
3 GIUGNO 2022

1. Individuare e classificare i punti critici della funzione

$$f(x,y) = \frac{1}{3}(1+xy)^3 - x^2 - y^2.$$

2. Sul triangolo A di vertici $(1,0)$, $(0,2)$ e $(1,2)$ calcolare

$$\int_A \frac{1}{1+2y}\, dxdy.$$

ES 1

$f(x,y) = \frac{1}{3}(1+xy)^3 - x^2 - y^2$. Punti critici

$$\begin{cases} \partial_x f = (1+xy)^2 y - 2x = 0 & (E1) \\ \partial_y f = (1+xy)^2 x - 2y = 0 & (E2) \end{cases}$$

Se $x=0 \Rightarrow y=0$; se $y=0 \Rightarrow x=0$. Dunque $P_1=(0,0)$ è critico. Inoltre, se $(x,y) \neq (0,0)$ è critico vale $x \neq 0$ e $y \neq 0$. Cerco punti critici con $x, y \neq 0$

Vale $(-x)\cdot(E1) + y\cdot(E2) = 0 \Rightarrow 2(x^2 - y^2) = 0$

$\Rightarrow y = x$ oppure $y = -x$.

Se $y = x \overset{\neq 0}{,}$ allora $(1+x^2)^2 - 2 = 0 \Rightarrow (1+x^2)^2 = 2$

$\Rightarrow 1+x^2 = \sqrt{2} \Rightarrow x = \pm(\sqrt{2}-1)^{1/2}$. Dunque

$P_2 = \left((\sqrt{2}-1)^{1/2}, (\sqrt{2}-1)^{1/2}\right)$ e $P_3 = \left(-(\sqrt{2}-1)^{1/2}, -(\sqrt{2}-1)^{1/2}\right)$

sono critici. Se $y = -x \overset{\neq 0}{}$ troviamo $(1-x^2)^2(-x) - 2x = 0$

che non ha soluzioni $x \neq 0$.

studio hessiana.

$$Hf(x,y) = \begin{bmatrix} 2y^2(1+xy) - 2 & (1+xy)(1+3xy) \\ (1+xy)(1+3xy) & 2x^2(1+xy) - 2 \end{bmatrix}$$

In P_2 e P_3 vale $xy = x^2 = y^2 = \sqrt{2}-1$

$$\Rightarrow Hf(x,y) = \begin{bmatrix} 2(\sqrt{2}-1)\sqrt{2} - 2 & \sqrt{2}(1+3(\sqrt{2}-1)) \\ \sqrt{2}(1+3(\sqrt{2}-1)) & 2(\sqrt{2}-1)\sqrt{2} - 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2(1-\sqrt{2}) & 2(3-\sqrt{2}) \\ 2(3-\sqrt{2}) & 2(1-\sqrt{2}) \end{bmatrix}$$

$\det Hf(P_2) = \det Hf(P_3) = 4\left[(1-\sqrt{2})^2 - (3-\sqrt{2})^2\right] =$

$= (-8+4\sqrt{2})\cdot 4 < 0 \Rightarrow P_2, P_3$ sono di sella

Analisi punto $(0,0)$

$$Hf(0,0) = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \qquad \begin{cases} -2 < 0 \\ \det Hf(0,0) = 3 > 0 \end{cases}$$

Dunque $(0,0)$ è di massimo.

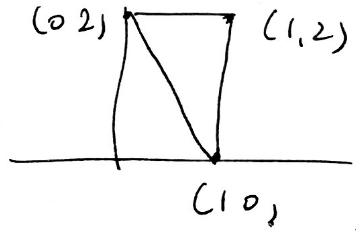
Nota: oltre al metodo scritto sopra, a partire da
$$\begin{cases} (1+xy)^2 y - 2x = 0 \\ (1+xy)^2 x - 2y = 0 \end{cases}$$
si poteva sottrarre membro a membro trovando

$$(1+xy)^2(y-x) - 2(x-y) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \underbrace{\left((1+xy)^2+2\right)}_{\neq 0}(y-x) = 0 \Rightarrow y = x.$$ Poi si prosegue come sopra

Sul triangolo A di vertici $(1,0)$, $(0,2)$ e $(1,2)$, calcolare

$$I := \int_A \frac{1}{1+2y}\,dx\,dy$$



Scriviamo

$$A = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \;/\; x \in [0,1] \text{ e } 2-2x \le y \le 2 \}$$

e otteniamo

$$I = \int_0^1 \left(\int_{2-2x}^{2} \frac{dy}{1+2y} \right) dx = \int_0^1 \left[\frac{1}{2} \ln(1+2y) \right]_{y=2-2x}^{y=2}$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^1 \{ \ln 5 - \ln(5-4x) \} \, dx = \frac{\ln 5}{2} - \frac{1}{2} (*)$$

Calcolo $(*) = \int_0^1 \ln(5-4x)\,dx = \Big(\begin{array}{l} 5-4x = t \\ dx = -\frac{1}{4}\,dt \end{array}$

$$= \int_5^1 \left(-\frac{1}{4}\right) \ln(t)\,dt \ \cancel{\text{poi}} = \frac{1}{4} \int_1^5 \ln t \, dt \quad \ldots$$