Corso di Laurea in Informatica

II parziale di Analisi Matematica

22 Maggio 2017

Marco Mughetti

Cognome: ....

Nome: ....

Numero di matricola: ....

Email: ....

Indicare la votazione riportata nel I parziale: ....

Risultati

1.(pt.5)	
2.(pt.5)	
3.(pt.5)	

Risolvere gli esercizi seguenti, scrivendo e motivando dettagliatamente il procedimento seguito. Soluzioni prive di calcoli e spiegazioni non saranno valutate.

Esercizio 1 (pt. 5)
Si calcoli il seguente integrale

$$\int_{-2}^{0} \frac{x^4 + x^3 - 4x + 20}{(x-3)(x^2+4x+8)}\, dx.$$

Risposta:
Si tratta di una funzione razionale da ridurre di grado.
Dividendo il polinomio $x^4 + x^3 - 4x + 20$ per $(x-3)(x^2+4x+8) = x^3 + x^2 - 4x - 24$ si ottiene che:

$$\frac{x^4 + x^3 - 4x + 20}{(x-3)(x^2+4x+8)} = x + 4 \cdot \frac{x^2+5x+5}{(x-3)(x^2+4x+8)}.$$

Inoltre, siccome il discriminante di $x^2 + 4x + 8$ è negativo, si tratta di individuare $A, B, C \in \mathbf{R}$ tali che:

$$\frac{x^2+5x+5}{(x-3)(x^2+4x+8)} = \frac{A}{x-3} + \frac{Bx+C}{(x^2+4x+8)}.$$

Dopo alcuni calcoli si prova che $A = C = 1, B = 0$:

$$\frac{x^2+5x+5}{(x-3)(x^2+4x+8)} = \frac{1}{x-3} + \frac{1}{x^2+4x+8}.$$

Quindi:

$$\frac{x^4 + x^3 - 4x + 20}{(x-3)(x^2+4x+8)} = x + \frac{4}{x-3} + \frac{4}{x^2+4x+8}$$

e perció

$$\begin{aligned}\int_{-2}^{0} \frac{x^4 + x^3 - 4x + 20}{(x-3)(x^2+4x+8)}\, dx &= \int_{-2}^{0} x\, dx + \int_{-2}^{0} \frac{4}{x-3}\, dx + \int_{-2}^{0} \frac{4}{x^2+4x+8}\, dx \\ &= [x^2/2 + 4\ln|x-3|]_{-2}^{0} + \int_{-2}^{0} \frac{4}{x^2+4x+8}\, dx \\ &= -2 + 4\ln 3 - 4\ln 5 + \int_{-2}^{0} \frac{4}{x^2+4x+8}\, dx.\end{aligned}$$

Infine:

$$\frac{4}{x^2+4x+8} = \frac{4}{(x+2)^2+4} = \frac{1}{(x/2+1)^2+1},$$

da cui

$$\int_{-2}^{0} \frac{4}{x^2+4x+8}\, dx = [2\arctan(x/2+1)]_{-2}^{0} = \pi/2.$$

In conclusione:

$$\int_{-2}^{0} \frac{x^4 + x^3 - 4x + 20}{(x-3)(x^2+4x+8)}\, dx = -2 + 4\ln 3 - 4\ln 5 + \pi/2.$$

Esercizio 2 (pt. 5)
Data $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$,

$$f(x, y) = \frac{1}{4}(y - 2)(9y^2 - 4(x + 1)^2)$$

I) Calcolare i suoi eventuali punti di massimo, di minimo locali e di sella.
II) Calcolare il piano tangente al grafico di f nel punto $(0, 2)$.
Risposta:
I) Si calcolano i punti critici di f:

$$\begin{cases} f_x = -2(x+1)(y-2) = 0 \\ f_y = \frac{27}{4}y^2 - 9y - (x+1)^2 = 0 \end{cases}$$

Si hanno due casi:

$$\begin{cases} x + 1 = 0 \\ \frac{27}{4}y^2 - 9y = 0 \end{cases} \Longrightarrow (-1, 0),\ (-1, 4/3);$$

$$\begin{cases} y - 2 = 0 \\ \frac{27}{4}y^2 - 9y - (x+1)^2 = 0 \end{cases} \begin{cases} y = 2 \\ (x+1)^2 = 9 \end{cases} \Longrightarrow (-4, 2),\ (2, 2);$$

I punti critici sono $(-1, 0),\ (-1, 4/3)\ , (-4, 2),\ (2, 2)$.
II) Si calcola la matrice Hessiana

$$\begin{pmatrix} -2(y-2) & -2(x+1) \\ -2(x+1) & \frac{27}{2}y - 9 \end{pmatrix},$$

pertanto:

$$H_f(-1, 0) = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & -9 \end{pmatrix} \Longrightarrow \quad (-1, 0)\ \text{Punto di sella;}$$

$$H_f(-1, 4/3) = \begin{pmatrix} 4/3 & 0 \\ 0 & 9 \end{pmatrix} \Longrightarrow \quad (-1, 4/3)\ \text{Punto di minimo relativo;}$$

$$H_f(2, 2) = \begin{pmatrix} 0 & -6 \\ -6 & 18 \end{pmatrix} \Longrightarrow \quad (2, 2)\ \text{Punto di sella;}$$

$$H_f(-4, 2) = \begin{pmatrix} 0 & 6 \\ 6 & 9 \end{pmatrix} \Longrightarrow \quad (-4, 2)\ \text{Punto di sella.}$$

II) Il piano tangente ad f nel punto $(0, 2)$ è

$$z = f(0, 2) + \langle \nabla f(0, 2), (x, y - 2) \rangle = \langle (0, 8), (x, y - 2) \rangle = 8y - 16.$$

$$\Longrightarrow z = 8y - 16.$$

Esercizio 3 (pt. 5)
Disegnare l'insieme

$$A = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 4, y - x \leq 2, y \geq 0\}.$$

e calcolare

$$\iint_A (y + 2x)\, dx\, dy.$$

Risposta:
I METODO:

$$A = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \mid y \in [0,2],\ y - 2 \leq x \leq \sqrt{4 - y^2}\}.$$

Pertanto:

$$\begin{aligned}
\iint_A (y + 2x)\, dx\, dy &= \int_0^2 \Big(\int_{y-2}^{\sqrt{4-y^2}} (y + 2x)\, dx \Big)\, dy \\
&= \int_0^2 \Big([yx + x^2]_{x=y-2}^{x=\sqrt{4-y^2}} \Big)\, dy \\
&= \int_0^2 \Big(y\sqrt{4 - y^2} - y^2 + 2y + 4 - y^2 - (y-2)^2 \Big)\, dy \\
&= \int_0^2 \Big(y\sqrt{4 - y^2} - 3y^2 + 6y \Big)\, dy \\
&= [-\frac{1}{3}(4 - y^2)^{\frac{3}{2}} - y^3 + 3y^2]_0^2 \\
&= -8 + 12 + 8/3 = 20/3
\end{aligned}$$

II METODO:
Si ha che:

$$A = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \mid x \in [-2,0],\ 0 \leq y \leq x+2\} \cup$$

$$\cup \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \mid x \in [0,2],\ 0 \leq y \leq \sqrt{4-x^2}\}.$$

Pertanto:

$$\begin{aligned}
\int\!\!\int_A (y+2x)\, dx\, dy &= \int_{-2}^{0} \Big(\int_0^{x+2} (y+2x)\ dy \Big)\, dx + \int_0^2 \Big(\int_0^{\sqrt{4-x^2}} (y+2x)\ dy \Big)\, dx \\
&= \int_{-2}^{0} [y^2/2 + 2xy]_{y=0}^{y=x+2})\, dx + \int_0^2 [y^2/2+2xy]_{y=0}^{y=\sqrt{4-x^2}})\, dx \\
&= \int_{-2}^{0} \Big((x+2)^2/2 + 2x(x+2) \Big)\, dx \\
&\quad + \int_0^2 \Big((4-x^2)/2 + 2x\sqrt{4-x^2} \Big)\, dx \\
&= \int_{-2}^{0} \Big(5/2x^2 + 6x + 2) \Big)\, dx + \int_0^2 \Big((2 - x^2/2 + 2x\sqrt{4-x^2} \Big)\, dx \\
&= [5/6x^3 + 3x^2 + 2x]_{-2}^{0} + [2x - x^3/6 - 2/3(4-x^2)^{\frac{3}{2}}]_0^2 \\
&= (20/3 - 12 + 4) + (4 - 4/3 + 16/3) = 20/3.
\end{aligned}$$