Corso di Laurea in Informatica

II parziale di Analisi Matematica

16 Maggio 2016

Prof. Vania Sordoni - Prof. Marco Mughetti

Cognome: ....

Nome: ....

Numero di matricola: ....

Email: ....

Indicare la votazione riportata nel I parziale: ....

Risultati

1.(pt.3)	
2.(pt.4)	
3.(pt.4)	
4.(pt.4)	

Risolvere gli esercizi seguenti, scrivendo e motivando dettagliatamente il procedimento seguito. Soluzioni prive di calcoli e spiegazioni non saranno valutate.

Esercizio 1
Individuare tutti i valori di $\alpha \in \mathbf{R}$ per cui converge la serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \Big(\sqrt{n^4 - 2n^2 + 2} - n^2 + 1 - \frac{1}{2n^2}\Big) n^\alpha.$$

Si ricordi la formula di Taylor:

$$\sqrt{1+t} = 1 + \frac{t}{2} - \frac{t^2}{8} + \frac{t^3}{16} - \frac{5t^4}{128} + o(t^4), \quad \text{per } t \longrightarrow 0.$$

Risposta:
Si ha che:

$$\sqrt{n^4 - 2n^2 + 2} - n^2 + 1 - \frac{1}{2n^2} = n^2\Big(\sqrt{1 - 2\frac{1}{n^2} + 2\frac{1}{n^4}} - 1 + \frac{1}{n^2} - \frac{1}{2n^4}\Big),$$

e quindi:

$$\begin{aligned}
\sqrt{1 - \frac{2}{n^2} + \frac{2}{n^4}} &= 1 + \frac{1}{2}(-\frac{2}{n^2} + \frac{2}{n^4}) - \frac{1}{8}(-\frac{2}{n^2} + \frac{2}{n^4})^2 + \frac{1}{16}(-\frac{2}{n^2} + \frac{2}{n^4})^3 + o(\frac{1}{n^6}) \\
&= 1 + \big(-\frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^4}\big) - \frac{1}{8}\big(4\frac{1}{n^4} - 8\frac{1}{n^6}\big) + \frac{1}{16}(-8\frac{1}{n^6}) + o(\frac{1}{n^6}) \\
&= 1 - \frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^4} - \frac{1}{2}\frac{1}{n^4} + \frac{1}{n^6} - \frac{1}{2}\frac{1}{n^6} + o(\frac{1}{n^6}) \\
&= 1 - \frac{1}{n^2} + \frac{1}{2n^4} + \frac{1}{2n^6} + o(\frac{1}{n^6}).
\end{aligned}$$

In conclusione:

$$\begin{aligned}
\sqrt{n^4 - 2n^2 + 2} - n^2 + 1 - \frac{1}{2n^2} &= n^2\Big(\sqrt{1 - 2\frac{1}{n^2} + 2\frac{1}{n^4}} - 1 + \frac{1}{n^2} - \frac{1}{2n^4}\Big), \\
&= n^2\Big(\frac{1}{2n^6} + o(\frac{1}{n^6})\Big) = \frac{1}{2n^4} + o(\frac{1}{n^4}),
\end{aligned}$$

pertanto la serie data converge se e solo se converge

$$\sum_{n=1}^{+\infty} n^\alpha \frac{1}{n^4} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{4-\alpha}}$$

e quindi $\alpha < 3$.

Esercizio 2
Si calcoli il seguente integrale

$$\int_{\ln 2}^{\ln 3} \frac{e^{4x} - 3e^{3x} + 7e^{2x} + e^x}{e^{2x} - 4e^x + 5}\, dx.$$

Risposta:
Effettuando il cambio di variabile $y = e^x$, si ottiene $dx = \frac{1}{e^x}dy = \frac{1}{y}dy$ e quindi:

$$\int_{\ln 2}^{\ln 3} \frac{e^{4x} - 3e^{3x} + 7e^{2x} + e^x}{e^{2x} - 4e^x + 5}\, dx = \int_2^3 \frac{y^3 - 3y^2 + 7y + 1}{y^2 - 4y + 5}\, dy.$$

Dunque:

$$\frac{y^3 - 3y^2 + 7y + 1}{y^2 - 4y + 5} = y + 1 + \frac{6y - 4}{y^2 - 4y + 5},$$

perciò

$$\int_2^3 \frac{y^3 - 3y^2 + 7y + 1}{y^2 - 4y + 5}\, dy \quad = \quad \int_2^3 (y+1)\, dy + \int_2^3 \frac{6y - 4}{y^2 - 4y + 5}\, dy.$$

Dunque:

$$\int_2^3 (y+1)\, dy \quad = \quad [y^2/2 + y]_2^3 = 9/2 + 3 - 2 - 2 = 7/2,$$

$$\begin{aligned}
\int_2^3 \frac{6y - 4}{y^2 - 4y + 5}\, dy &= 3\int_2^3 \frac{2y - 4}{y^2 - 4y + 5}\, dy + 8\int_2^3 \frac{1}{y^2 - 4y + 5}\, dy \\
&= 3\int_2^3 \frac{2y - 4}{y^2 - 4y + 5}\, dy + 8\int_2^3 \frac{1}{(y-2)^2 + 1}\, dy \\
&= [3\ln(y^2 - 4y + 5) + 8\arctan(y-2)]_2^3 = 3\ln 2 + 2\pi
\end{aligned}$$

In conclusione:

$$\int_2^3 \frac{y^3 - 3y^2 + 7y + 1}{y^2 - 4y + 5}\, dy = 7/2 + 3\ln 2 + 2\pi.$$

Esercizio 3
Data $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$,

$$f(x,y) = x^3 + 3xy^2 + 3y^2 - 12x$$

I) Calcolare i suoi eventuali punti di massimo, di minimo locali e di sella.
II) Calcolare il piano tangente al grafico di f nel punto $(1,-1)$.
Risposta:
I) Si calcolano i punti critici di f:

$$\begin{cases} f_x = 3x^2 + 3y^2 - 12 = 0 \\ f_y = 6xy + 6y = 0 \end{cases}$$

Quindi:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 4 = 0 \\ y(x+1) = 0 \end{cases}$$

Si hanno due casi:

$$\begin{cases} x^2 - 4 = 0 \\ y = 0 \end{cases} \Longrightarrow (\pm 2, 0);$$

$$\begin{cases} y^2 - 3 = 0 \\ x = -1 \end{cases} \Longrightarrow (-1, \pm\sqrt{3});$$

I punti critici sono $(\pm 2, 0), (-1, \pm\sqrt{3})$.
II) Si calcola la matrice Hessiana

$$\begin{pmatrix} 6x & 6y \\ 6y & 6x+6 \end{pmatrix},$$

pertanto:

$$H_f(2,0) = \begin{pmatrix} 12 & 0 \\ 0 & 18 \end{pmatrix} \Longrightarrow \quad (2,0) \text{ Punto di minimo relativo;}$$

$$H_f(-2,0) = \begin{pmatrix} -12 & 0 \\ 0 & -6 \end{pmatrix} \Longrightarrow \quad (-2,0) \text{ Punto di massimo relativo;}$$

$$H_f(-1,\sqrt{3}) = \begin{pmatrix} -6 & 6\sqrt{3} \\ 6\sqrt{3} & 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow \quad (-1,\sqrt{3}) \text{ Punto di sella;}$$

$$H_f(-1,-\sqrt{3}) = \begin{pmatrix} -6 & -6\sqrt{3} \\ -6\sqrt{3} & 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow \quad (-1,-\sqrt{3}) \text{ Punto di sella.}$$

II) Il piano tangente ad f nel punto $(1,-1)$ è

$$z = f(1,-1) + \langle \nabla f(1,-1), (x-1, y+1) \rangle = -5 + \langle (-6,-12), (x-1,y+1) \rangle = -11 - 6x - 12y.$$

$$\Longrightarrow z = -11 - 6x - 12y.$$

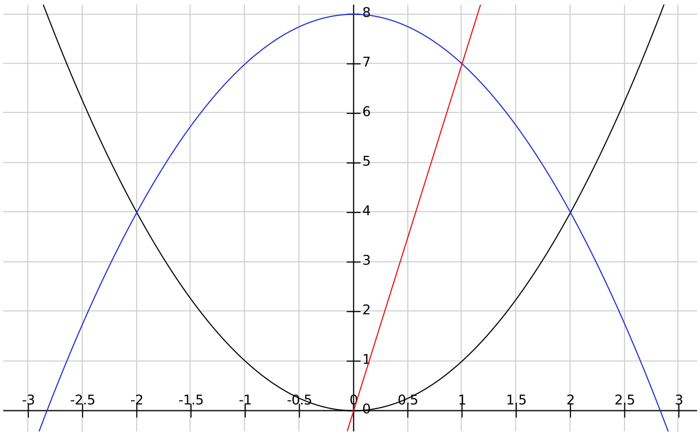

Figure 1: Regione A

Esercizio 4
Calcolare

$$\iint_A e^x \, dx \, dy,$$

dove

$$A = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \mid x^2 \le y \le -x^2 + 8, \quad y \le 7x\}.$$

Risposta:
Si ha che:

$$A = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \mid x \in [0,1],\, x^2 \le y \le 7x\} \cup \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \mid x \in [1,2],\, x^2 \le y \le -x^2+8\}.$$

Pertanto:

$$\begin{aligned}
\iint_A e^x \, dx \, dy &= \int_0^1 \Big(\int_{x^2}^{7x} e^x \, dy \Big) \, dx + \int_1^2 \Big(\int_{x^2}^{-x^2+8} e^x \, dy \Big) \, dx \\
&= \int_0^1 e^x \Big(\int_{x^2}^{7x} \, dy \Big) \, dx + \int_1^2 e^x \Big(\int_{x^2}^{-x^2+8} \, dy \Big) \, dx \\
&= \int_0^1 e^x (7x - x^2) \, dx + \int_1^2 e^x (-2x^2 + 8) \, dx \\
&= 7 \int_0^1 x e^x \, dx - \int_0^1 x^2 e^x \, dx - 2 \int_1^2 x^2 e^x \, dx + 8 \int_1^2 e^x \, dx \\
&= [7xe^x - 7e^x - x^2 e^x + 2xe^x - 2e^x]_0^1 + [-2x^2 e^x + 4xe^x - 4e^x + 8e^x]_1^2 \\
&= [9xe^x - 9e^x - x^2 e^x]_0^1 + [-2x^2 e^x + 4xe^x + 4e^x]_1^2 \\
&= (9e - 9e - e + 9) + (-8e^2 + 8e^2 + 4e^2 + 2e - 4e - 4e) \\
&= (9 - e) + (4e^2 - 6e) = 4e^2 - 7e + 9
\end{aligned}$$

Infatti, integrando per parti si prova che:

$$\int x e^x \, dx = x e^x - \int e^x \, dx = x e^x - e^x,$$

$$\int x^2 e^x \, dx = x^2 e^x - 2 \int x e^x \, dx = x^2 e^x - 2x e^x + 2e^x.$$