Corso di Laurea in Informatica

II parziale di Analisi Matematica

18 Maggio 2015

Prof. Vania Sordoni- Prof. Marco Mughetti

Cognome: ....

Nome: ....

Numero di matricola: ....

Email: ....

Risultati

1.(pt.5)	
2.(pt.5)	
3.(pt.5)	

Risolvere gli esercizi seguenti, scrivendo e motivando <u>dettagliatamente</u> il procedimento seguito. Soluzioni prive di calcoli e spiegazioni non saranno valutate.

Esercizio 1
Si calcoli il seguente integrale

$$\int_{\ln 3}^{\ln 4} \frac{4e^{2x} - 3e^{x} - 4}{e^{2x} - e^{x} - 2}\, dx.$$

Risposta:
Ponendo $t = e^x$, l'integrale diventa

$$\int_3^4 \frac{4t^2 - 3t - 4}{t(t^2 - t - 2)}\, dt.$$

Siccome l'equazione $t^2 - t - 2 = 0$ ha radici $2, -1$, il denominatore della funzione integranda $t(t^2 - t - 2)$ si fattorizza in $t(t+1)(t-2)$. Si devono dunque determinare $A, B, C \in \mathbf{R}$ tali che

$$\frac{4t^2 - 3t - 4}{t(t^2 - t - 2)} = \frac{A}{t} + \frac{B}{t+1} + \frac{C}{t-2}.$$

Dopo alcuni calcoli si ottiene che $A = 2, B = 1 = C$ e quindi

$$\begin{aligned} \int_3^4 \frac{4t^2 - 3t - 4}{t(t^2 - t - 2)}\, dt &= \int_3^4 \left(\frac{2}{t} + \frac{1}{t+1} + \frac{1}{t-2} \right) dt. \\ &= \left[2\ln|t| + \ln|t+1| + \ln|t-2| \right]_3^4 \\ &= 3\ln 2 - 2\ln 3 + \ln 5 = \ln 40/9 \end{aligned}$$

Esercizio 2
Data $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$,

$$f(x, y) = x^4 + x^2y^2 - 2x^2 + 2y^2 + 4$$

I) Calcolare i suoi eventuali punti di massimo, di minimo locali e di sella.
II) Calcolare la derivata direzionale di f nel punto $(1, 1)$ rispetto alla direzione $v = (\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2)$.
Risposta:
Si calcono i punti critici di f:

$$\begin{cases} f_x = 4x^3 + 2xy^2 - 4x = 0 \\ f_y = 2x^2y + 4y = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x^3 + xy^2 - 2x = 0 \\ 2y\underbrace{(x^2 + 2)}_{\neq 0} = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x(x^2 - 1) = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$

da cui si ottengono i punti $(0, 0)$ e $(\pm 1, 0)$.
Si calcola la matrice Hessiana

$$\begin{pmatrix} 12x^2 + 2y^2 - 4 & 4xy \\ 4xy & 2x^2 + 4 \end{pmatrix},$$

da cui risulta che $(0, 0)$ è un punto di sella, mentre i punti $(\pm 1, 0)$ sono di minimo locale.
La derivata direzionale di f nel punto $(1, 1)$ rispetto alla direzione $v = (\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2)$ è

$$\frac{\partial f}{\partial v}(1, 1) = \langle \nabla f(1, 1), (\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2) \rangle = 4\sqrt{2}.$$

Esercizio 3
Calcolare
$$\int\!\!\int_A xy^3 \; dx\, dy,$$
dove
$$A = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid 0 \leq x,\ 0 \leq y \leq \sqrt{3x},\ \ x^2 + y^2 \leq 4\}.$$
Risposta:
Si ha che:
$$\int_0^1 \left(x \int_0^{\sqrt{3x}} y^3 dy \right) dx + \int_1^2 \left(x \int_0^{\sqrt{4-x^2}} y^3 dy \right) dx =$$
$$= \int_0^1 \frac{9}{4} x^3 dx - \frac{1}{8} \int_1^2 (-2x)(4 - x^2)^2 dx = [\frac{9}{16} x^4]_0^1 - [\frac{1}{24}(4 - x^2)^3]_1^2 = 27/16$$