Corso di Laurea in Informatica

I parziale di Analisi Matematica

17 Dicembre 2018

Marco Mughetti

Cognome: ....

Nome: ....

Numero di matricola: ....

Email: ....

Risultati

1.(pt.1)	
2.(pt.1)	
3.(pt.2)	
4.(pt.6)	
5.(pt.5)	

Risolvere gli esercizi seguenti, scrivendo e motivando <u>dettagliatamente</u> il procedimento seguito. Soluzioni prive di calcoli e spiegazioni NON SARANNO VALUTATE.
È possibile scrivere sul retro dei fogli se lo spazio previsto per la risposta non è sufficiente.

Esercizio 1(pt. 1)
Data $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, scrivere la definizione di

$$\lim_{x \to -3^+} f(x) = -\infty$$

Risposta:

$\forall M > 0 : \exists \delta = \delta(-3, M) > 0 : \forall x \in \mathbb{R} : -3 < x < -3 + \delta$

$\Longrightarrow f(x) < -M$

Esercizio 2(pt. 1)
Stabilire se la seguente affermazione sia corretta:
" Dato $\emptyset \neq A \subset \mathbf{R}$ e data $f : A \longrightarrow \mathbf{R}$ derivabile su A, se la sua derivata prima f' è identicamente nulla su A (cioè, $f'(x) = 0, \quad \forall x \in A$) allora f è costante su A."
Giustificare la risposta.
Risposta:

L'affermazione è vera se A è un intervallo.

$A = [a, b]$, $\forall x_1, x_2 \in [a, b] : x_1 < x_2$

Dal T. di Lagrange : $\exists c \in]x_1, x_2[$:

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = f'(c) = 0 \implies f(x_2) = f(x_1)$$

Se A non è un intervallo :

$$f(x) = \arctg x + \arctg \frac{1}{x}$$

$$A = \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

$f(x) = \frac{\pi}{2}$ se $x > 0$ $\quad f(x) = -\frac{\pi}{2}$ se $x < 0$

Esercizio 3(pt. 2)
Enunciare il teorema di Rolle per la funzione $g : [-1, 1] \longrightarrow \mathbf{R}$.
Stabilire, se esistono, per quali valori di $a, b \in \mathbf{R}$ si può applicare il suddetto teorema alla funzione $g : [-1, 1] \longrightarrow \mathbf{R}$ definita da

$$g(x) = \begin{cases} \pi & \text{se } x = -1, \\ b \arcsin(x) + a(x-1) & \text{se } -1 < x \leq 1. \end{cases}$$

nell'intervallo $[-1, 1]$.
Argomentare la risposta.
Risposta:

T. di Rolle: $g : [-1,1] \longrightarrow \mathbb{R}$
g continua su $[-1,1]$
g derivabile su $]-1,1[$
$g(-1) = g(1)$
$\Longrightarrow \exists\, c \in]-1,1[: g'(c) = 0$

---

g continua su $[-1,1] \Longleftrightarrow \lim_{x \to -1} g(x) = \pi$

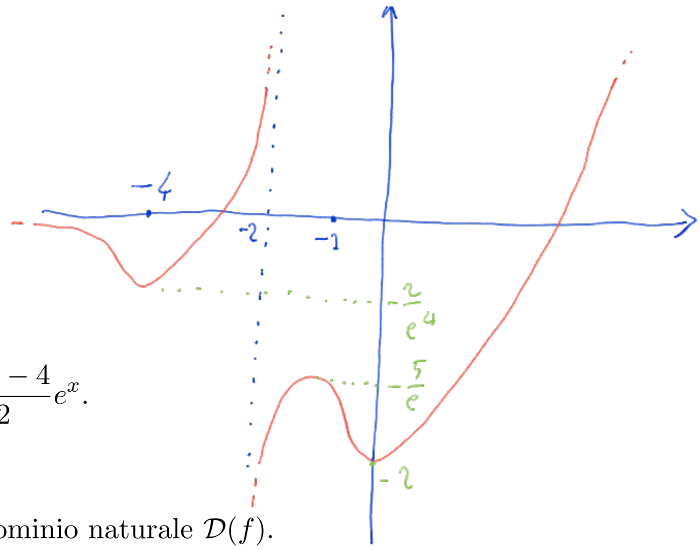
$\lim_{x \to -1} g(x) = -\frac{\pi}{2} \cdot b - 2a \longrightarrow -\pi - 2a = \pi$

$a = -\pi$

arcsin è derivabile su $]-1,1[\Longrightarrow g$ è DERIVABILE su $]-1,1[$

$g(-1) = g(+1) \Rightarrow \pi = b\frac{\pi}{2} \rightarrow b = 2$

Esercizio 4(pt. 6)
Sia data la funzione $\mathcal{D}(f) \to \mathbf{R}$



$$f(x) = \frac{x^2+2x-4}{x+2}e^x.$$

I Disegnare il suo grafico.

II Calcolare l'immagine di f sul suo dominio naturale $\mathcal{D}(f)$.

III Stabilire per quali $\lambda \in \mathbf{R}$ l'equazione $f(x) = \lambda$ ha due soluzioni reali distinte.

Può essere utile ricordarsi che $2 < e < 3$.

$\mathcal{D}(f) = \mathbb{R} \setminus \{-2\}$

$-\infty \qquad \to \; -2 \; \leftarrow \qquad +\infty$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{(x^2+2x-4)e^x \to 0}{x+2 \to -\infty} = 0$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \underbrace{\frac{x^2+2x-4}{x+2}}_{\to +\infty} \cdot \underbrace{e^x}_{\to +\infty} = +\infty$$

$$\lim_{x\to-2^\mp} f(x) = \begin{cases} +\infty \\ -\infty \end{cases}$$

$$= \lim_{x\to-2^\mp} \frac{1}{x+2} \cdot \underbrace{(x^2+2x-4)e^x}_{\to -4e^{-2}}$$

$x\to-2^+$: $+\infty$ $\qquad$ $x\to-2^-$: $-\infty$

$$f'(x) = \frac{(2x+2)e^x(x+2) + (x^2+2x-4)e^x(x+2) - (x^2+2x-4)e^x}{(x+2)^2}$$

$$= \frac{e^x}{(x+2)^2} \cdot \left[2(x+1)\cdot(x+2) + (x^2+2x-4)\cdot(x+1)\right]$$

$$= \frac{e^x}{(x+2)^2}(x+1)(2x+4+x^2+2x-4) = \underbrace{\frac{e^x}{(x+2)^2}}_{>0} \cdot (x+1)(x^2+4x)$$

		-4		-2		-1		0	
f'	$-$	0	$+$		$+$	0	$-$	0	$+$
f	$\searrow$		$\nearrow$		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$

$f(-4) = -\frac{2}{e^4}$ $\qquad$ $f(-1) = -\frac{5}{e}$ $\qquad$ $-\frac{2}{e^4} > -\frac{5}{e}$ $\left(\Leftrightarrow e^3 > \frac{2}{5}\right)$

$f(0) = -2$ $\qquad$ (-2 vs $-\frac{5}{e}$: $\vee$)

Esercizio 5(pt. 5)
Sapendo che, per $t \to 0$,

- $\sin t = t - \frac{1}{3!}t^3 + \frac{1}{5!}t^5 - \frac{1}{7!}t^7 + o(t^7)$,

- $e^t = 1 + t + \frac{1}{2!}t^2 + \frac{1}{3!}t^3 + \frac{1}{4!}t^4 + \frac{1}{5!}t^5 + \frac{1}{6!}t^6 + o(t^6)$,

- $\cos t = 1 - \frac{1}{2!}t^2 + \frac{1}{4!}t^4 - \frac{1}{6!}t^6 + o(t^6)$,

- $\ln(1+t) = t - \frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{3}t^3 - \frac{1}{4}t^4 + \frac{1}{5}t^5 - \frac{1}{6}t^6 + o(t^6)$,

calcolare

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{x\cos(x)} - \ln(1+xe^x) + \frac{1}{6}\sin(x^3) - 1}{x^4}$$

Risposta:
CALCOLARE gli sviluppi di Taylor delle seguenti funzioni, NELLA FORMA in cui saranno usati nel limite dato (con tutte le semplificazioni algebriche effettuate) e risolvere il limite assegnato:

- $\frac{1}{6}\sin(x^3) = \frac{1}{6}\left(x^3 + o\left((x^3)^2\right)\right) = \frac{x^3}{6} + o(x^4)$

- $e^{x\cos(x)} = 1 + x\cos x + \frac{(x\cos x)^2}{2!} + \frac{(x\cos x)^3}{3!} + \frac{(x\cos x)^4}{4!} + \overbrace{o\left((x\cos x)^4\right)}^{o(x^4)}$

$$= 1 + x\left(1 - \frac{x^2}{2} + o(x^3)\right) + \frac{\left(x - \frac{x^3}{2} + o(x^4)\right)^2}{2} + \frac{\left(x - \frac{x^3}{2} + o(x^4)\right)^3}{6}$$

$$+ \frac{x^4}{4!} + o(x^4) =$$

$$= 1 + \left(x - \frac{x^3}{2}\right) + \frac{1}{2}\left(x^2 - x^4\right) + \frac{1}{6}x^3 + \frac{x^4}{24} + o(x^4)$$

$$= 1 + x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} + \left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{24}\right)x^4 + o(x^4)$$

$$= 1 + x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \frac{11}{24}x^4 + o(x^4)$$

- $\ln(1+xe^x) = xe^x - \dfrac{(xe^x)^2}{2} + \dfrac{(xe^x)^3}{3} - \dfrac{(xe^x)^4}{4} + \overset{\displaystyle o(x^4)}{\overset{\parallel}{o\big((xe^x)^4\big)}}$

$$= x\left(1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + o(x^3)\right) - \frac{\left(x + x^2 + \frac{x^3}{2} + o(x^3)\right)^2}{2}$$

$$+ \frac{\left(x + x^2 + o(x^2)\right)^3}{3} - \frac{x^4}{4} + o(x^4)$$

$$= \left(x + x^2 + \frac{x^3}{2} + \frac{x^4}{6}\right) - \frac{x^2}{2} - x^3 - \frac{x^4}{2} - \frac{x^4}{2}$$

$$+ \frac{x^3}{3} + x^4 - \frac{x^4}{4} + o(x^4) =$$

$$= x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} - \frac{x^4}{12} + o(x^4)$$

Quindi:

$$e^{x\cos(x)} - \ln(1+xe^x) + \tfrac{1}{6}\sin(x^3) - 1 = \cancel{1} + \cancel{x} + \cancel{\frac{x^2}{2}} - \cancel{\frac{x^3}{3}} - \frac{11}{24}x^4 -$$

$$- \cancel{x} - \cancel{\frac{x^2}{2}} + \cancel{\frac{x^3}{6}} + \frac{x^4}{12} + \cancel{\frac{x^3}{6}} - \cancel{1} + o(x^4) =$$

$$= -\frac{9}{24}x^4 + o(x^4)$$

e infine

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{x\cos(x)} - \ln(1+xe^x) + \frac{1}{6}\sin(x^3) - 1}{x^4} = -\frac{3}{8}$$