Corso di Laurea in Informatica

I parziale di Analisi Matematica

13 Dicembre 2016

Marco Mughetti

Esercizio 1
Data $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, dare la definizione di

$$\lim_{x \to -2^+} f(x) = -5$$

Risposta:
$\forall \varepsilon > 0$, $\exists\, \delta_\varepsilon > 0$ tale che $\forall x \in \mathbf{R}$, $-2 < x < -2 + \delta_\varepsilon$, si ha che $|f(x) + 5| < \varepsilon$.

Esercizio 1'
Data $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, dare la definizione di

$$\lim_{x \to -5^-} f(x) = -2$$

Risposta:
$\forall \varepsilon > 0$, $\exists\, \delta_\varepsilon > 0$ tale che $\forall x \in \mathbf{R}$, $-5 - \delta_\varepsilon < x < -5$, si ha che $|f(x) + 2| < \varepsilon$.

Esercizio 2 Data $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = x^3 + x^2 + x + 6$
Calcolare, se esiste, la derivata della funzione inversa nel punto $y = 5$, $\frac{df^{-1}}{dy}(5)$
Risposta:
Poiché $f(x) = 5$ sse $x = -1$ si ha

$$\frac{df^{-1}}{dy}(5) = \frac{1}{f'(-1)} = \frac{1}{3x^2 + 2x + 1_{|x=-1}} = \frac{1}{2}$$

Esercizio 2
Data $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = x^3 + x^2 + x + 4$
Calcolare, se esiste, la derivata della funzione inversa nel punto $y = 7$, $\frac{df^{-1}}{dy}(7)$
Risposta:
Poiché $f(x) = 7$ sse $x = 1$ si ha

$$\frac{df^{-1}}{dy}(7) = \frac{1}{f'(1)} = \frac{1}{3x^2 + 2x + 1_{|x=1}} = \frac{1}{6}$$

Esercizio 3
Sia data la funzione $\mathcal{D}(f) \to \mathbf{R}$

$$f(x) = \frac{e^{\frac{1}{x+1}}}{x-1}.$$

I Disegnare il suo grafico.

II Calcolare l'immagine di f sul suo dominio naturale $\mathcal{D}(f)$.

III Stabilire per quali $\lambda \in \mathbf{R}$ l'equazione $f(x) = \lambda$ ha 2 soluzioni reali distinte.

Può essere utile ricordarsi che $e = 2,71.....$
Risposta:
I. La funzione f è definita su tutto $\mathbf{R} \setminus \{-1, 1\}$.
Si ha che:

$$\lim_{x \longrightarrow \pm\infty} f(x) = 0,$$

$$\lim_{x \longrightarrow -1^-} f(x) = 0, \qquad \lim_{x \longrightarrow -1^+} f(x) = -\infty,$$

$$\lim_{x \longrightarrow 1^-} f(x) = -\infty, \qquad \lim_{x \longrightarrow 1^+} f(x) = +\infty.$$

La funzione è derivabile per $x \neq \pm 1$. Si calcola che:

$$f'(x) = \frac{e^{\frac{1}{x+1}}\left(-\frac{1}{(x+1)^2}\right)(x-1) - e^{\frac{1}{x+1}}}{(x-1)^2} = -e^{\frac{1}{x+1}} \frac{x^2+3x}{(x^2-1)^2}$$

e quindi $f'(x) = 0$ se e solo se $x = -3$ o $x = 0$ e $f(-3) = -\frac{1}{4\sqrt{e}}$ mentre $f(0) = -e$.
Inoltre, f è decrescente per $x < -3$ e $x > 0 (x \neq 1)$, mentre è crescente per $-3 < x < 0 (x \neq -1)$.

II. Dal punto precedente si ottiene che $\mathrm{Imf} =]-\infty, -\mathrm{e}] \cup [-\dfrac{1}{4\sqrt{\mathrm{e}}}, 0[\cup]0, +\infty[$.

III. Per $\lambda < -e$ e $-\frac{1}{4\sqrt{e}} < \lambda < 0$.

Esercizio 3'
Sia data la funzione $\mathcal{D}(f) \to \mathbf{R}$

$$f(x) = \frac{e^{\frac{1}{1-x}}}{x+1}.$$

I Disegnare il suo grafico.

II Calcolare l'immagine di f sul suo dominio naturale $\mathcal{D}(f)$.

III Stabilire per quali $\lambda \in \mathbf{R}$ l'equazione $f(x) = \lambda$ ha 2 soluzioni reali distinte.

Può essere utile ricordarsi che $e = 2,71.....$
Risposta:
I. La funzione f è definita su tutto $\mathbf{R} \setminus \{-1, 1\}$.
Si ha che:

$$\lim_{x \longrightarrow \pm\infty} f(x) = 0,$$

$$\lim_{x \longrightarrow -1^+} f(x) = +\infty, \qquad \lim_{x \longrightarrow -1^-} f(x) = -\infty,$$

$$\lim_{x \longrightarrow 1^-} f(x) = +\infty, \qquad \lim_{x \longrightarrow 1^+} f(x) = 0.$$

La funzione è derivabile per $x \neq \pm 1$. Si calcola che:

$$f'(x) = \frac{e^{\frac{1}{1-x}}\left(\frac{1}{(1-x)^2}\right)(x+1) - e^{\frac{1}{1-x}}}{(x+1)^2} = e^{\frac{1}{1-x}} \frac{-x^2+3x}{(1-x^2)^2}$$

e quindi $f'(x) = 0$ se e solo se $x = 3$ o $x = 0$ e $f(3) = \frac{1}{4\sqrt{e}}$ mentre $f(0) = e$. Inoltre, f è decrescente per $x < 0$ e $x > 3 (x \neq -1)$, mentre è crescente per $0 < x < 3 (x \neq 1)$.

II. Dal punto precedente si ottiene che Imf $=] - \infty, 0[\cup]0, \frac{1}{4\sqrt{\mathrm{e}}}] \cup [\mathrm{e}, +\infty[$.

III. Per $\lambda > e$ e $0 < \lambda < \frac{1}{4\sqrt{e}}$.

Esercizio 5
Sapendo che, per $t \to 0$,

- $\tan t = t + \frac{1}{3}t^3 + \frac{2}{15}t^5 + \frac{17}{315}t^7 + o(t^7)$

- $\ln(1+t) = t - \frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{3}t^3 - \frac{1}{4}t^4 + o(t^4)$

- $(1+t)^\alpha = 1 + \alpha t + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}t^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}t^3 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)(\alpha-3)}{4!}t^4 + o(t^4)$

Calcolare

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+\tan x) + \ln(1-x) + \sqrt{1+2x^2-\frac{2}{3}x^3} - 1}{x^4}$$

Risposta:
CALCOLARE gli sviluppi di Taylor delle seguenti funzioni, NELLA FORMA in cui saranno usati nel limite dato e risolvere il limite assegnato:

-
$$\begin{aligned}\sqrt{1+2x^2-\frac{2}{3}x^3} &= 1 + \frac{1}{2}(2x^2 - \frac{2}{3}x^3) - \frac{1}{8}(2x^2 - \frac{2}{3}x^3)^2 + o(x^4) \\ &= 1 + x^2 - x^3/3 - \frac{1}{2}x^4 + o(x^4)\end{aligned}$$

- $\ln(1-x) = -x - x^2/2 - x^3/3 - x^4/4 + o(x^4)$

-
$$\begin{aligned}\ln(1+\tan x) &= \ln(1 + (x + x^3/3 + o(x^4))) = \\ &= (x + x^3/3 + o(x^4)) - \frac{(x + x^3/3 + o(x^4))^2}{2} \\ &\quad + \frac{(x + x^3/3 + o(x^4))^3}{3} - \frac{(x + x^3/3 + o(x^4))^4}{4} + o(x^4) \\ &= (x + x^3/3) - (x^2/2 + x^4/3) + x^3/3 - x^4/4 + o(x^4) \\ &= x - x^2/2 + \frac{2}{3}x^3 - \frac{7}{12}x^4 + o(x^4)\end{aligned}$$

Quindi:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+\tan x) + \ln(1-x) + \sqrt{1+2x^2-\frac{2}{3}x^3} - 1}{x^4} = \lim_{x\to 0} \frac{-\frac{16}{12}x^4 + o(x^4)}{x^4} = -\frac{4}{3}$$

Esercizio 5'
Calcolare

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)+\ln(1-\tan x)+\sqrt{1+2x^2+\frac{2}{3}x^3}-1}{x^4} =$$

Risposta:
CALCOLARE gli sviluppi di Taylor delle seguenti funzioni, NELLA FORMA in cui saranno usati nel limite dato e risolvere il limite assegnato:

- $$\begin{aligned}\sqrt{1+2x^2+\frac{2}{3}x^3} &= 1+\frac{1}{2}(2x^2+\frac{2}{3}x^3)-\frac{1}{8}(2x^2+\frac{2}{3}x^3)^2+o(x^4)\\ &= 1+x^2+x^3/3-\frac{1}{2}x^4+o(x^4)\end{aligned}$$

- $\ln(1+x) = +x - x^2/2 + x^3/3 - x^4/4 + o(x^4)$

- $$\begin{aligned}\ln(1-\tan x) &= \ln(1+(-x-x^3/3+o(x^4))) =\\ &= (-x-x^3/3+o(x^4)) - \frac{(-x-x^3/3+o(x^4))^2}{2}\\ &\quad +\frac{(-x-x^3/3+o(x^4))^3}{3} - \frac{(-x-x^3/3+o(x^4))^4}{4} + o(x^4)\\ &= (-x-x^3/3)-(x^2/2+x^4/3)-x^3/3-x^4/4+o(x^4)\\ &= -x-x^2/2-\frac{2}{3}x^3-\frac{7}{12}x^4+o(x^4)\end{aligned}$$

Quindi:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)+\ln(1-\tan x)+\sqrt{1+2x^2+\frac{2}{3}x^3}-1}{x^4} = \lim_{x\to 0}\frac{-\frac{16}{12}x^4+o(x^4)}{x^4} = -\frac{4}{3}$$