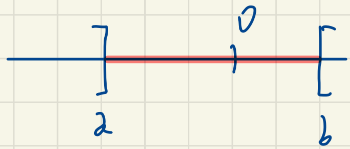
29. Novembre. 2021

SVILUPPO DI TAYLOR DI f PER $x \sim 0$

$$f : \,]a,b[\, \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$0 \in \,]a,b[$$



(1) se f è continua in 0:

$$\lim_{x \to 0} f(x) = f(0)$$

cioè:

$$\lim_{x \to 0} \left(f(x) - f(0) \right) = 0$$

dunque $f(x) - f(0)$ è un infinitesimo per $x \to 0$

$$f(x) - f(0) = o(1)$$

$$\Rightarrow \quad f(x) = \boxed{f(0)} + o(1)$$

per $x \to 0$

Se sostituiamo $f(0)$ con una costante $K \neq f(0)$:

$$\lim_{x \to 0} \left(f(x) - K \right) = f(0) - K \neq 0$$

$\longrightarrow$ $f(x) - K$ non è infinitesimo

cioè:

$$f(x) = K + (f(x) - K)$$

$\updownarrow$

<u>NON</u> È INFINITESIMO!

Quindi:

$f(0)$ è la migliore costante che approssima $f(x)$ per $x \sim 0$

$$f(x) = f(0) + o(1)$$

Se f è derivabile in $x=0$

allora:

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x} = f'(0) \in \mathbb{R}$$

$$\Updownarrow$$

$$\lim_{x\to 0} \Bigg[\underbrace{\frac{f(x)-f(0)}{x} - f'(0)}_{\displaystyle = \frac{f(x)-f(0)-f'(0)\cdot x}{x}} \Bigg] = 0$$

$$\Updownarrow$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)-f(0)-f'(0)\cdot x}{x} = 0$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0) - f'(0)\cdot x}{x} = 0$$

Pertanto :

$$f(x) - f(0) - f'(0)\cdot x = o(x)$$

per $x \to 0$

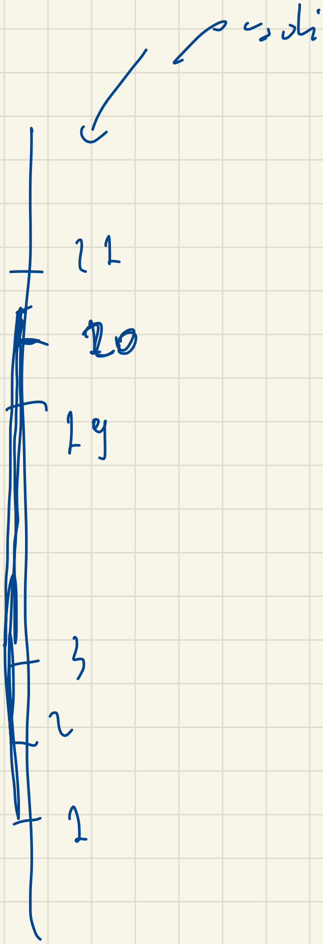
$$\Updownarrow$$

$$f(x) = \boxed{f(0) + f'(0)\cdot x} + o(x)$$

per $x \to 0$

è la migliore approssimazione lineare (cioè di grado 1) di f in $x=0$

perché l'errore tende a zero più velocemente di x



1

$\underline{20,5} \pm \underline{0,5}$

$20,5 \pm 4^{0}$

$$f(x) = \boxed{f(0) + f'(0) \cdot x} + o(x)$$

Fra tutti i polinomi di I grado

$$f(0) + f'(0) \cdot x$$

è quello che approssima meglio la funzione f per $x \to 0$ –

Il passo successivo è quello di scegliere il miglior polinomio di II grado che approssima $f(x)$

$$f(x) = f(0) + f'(0) \cdot x + a_2 \cdot x^2 + E_2(x)$$

errore nell' approssimaz.

Problema :

Dobbiamo scegliere $a_2 \in \mathbb{R}$ in modo che l' errore tenda a zero più velocemente di x^2, cioè:

$$E_2(x) = o(x^2)$$

ovvia, dovrà essere:

$$f(x) = f(0) + f'(0) \cdot x + a_2 \cdot x^2 + o(x^2)$$

$$f(x) = f(0) + f'(0) \cdot x + a_2 \cdot x^2 + o(x^2)$$

$$\Updownarrow$$

$$f(x) - f(0) - f'(0) \cdot x - a_2 \cdot x^2 = o(x^2)$$

$$\Updownarrow$$

Dobbiamo determinare $a_2 \in \mathbb{R}$ t.c.:

$$\boxed{\lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0) - f'(0) \cdot x - a_2 \cdot x^2}{x^2} = 0} \quad ? \qquad (\blacksquare)$$

A tal fine usiamo il teorema di De L'Hopital.

Assumiamo che f sia derivabile 2 volte in $x = 0$.

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)-f(0)-f'(0)\cdot x - a_2\cdot x^2}{x^2} \overset{H}{=}$$

$$\overset{H}{=} \lim_{x\to 0} \frac{f'(x)-f'(0)-\overset{=2!}{2}a_2\cdot x}{\underset{2!=}{2}x} =$$

$$= \lim_{x\to 0}\left(\frac{f'(x)-f'(0)}{2!\cdot x} - a_2\right) =$$

$$= \frac{1}{2!}\cdot\left(\lim_{x\to 0}\frac{f'(x)-f'(0)}{x}\right) - a_2$$

$$= \frac{1}{2!}f''(0) - a_2$$

Se vogliamo $(\blacksquare)$ allora:

$$\frac{1}{2!}f''(0)-a_2 = 0 \iff \boxed{a_2 = \frac{1}{2!}f''(0)}$$

$$f(x) = \boxed{f(0) + f'(0)\cdot x + \frac{1}{2!} f''(0)\cdot x^2} + o(x^2)$$

è la migliore approssimazione
di II grado di f in $x=0$

Qual è la miglior approssimazione
di III grado?

$$f(x) = f(0) + f'(0)\cdot x + \frac{1}{2!} f''(0)\cdot x^2 +$$
$$+ \overset{?}{a_3}\cdot x^3 + o(x^3)$$

per $x \longrightarrow 0$

$$f(x) = f(0) + f'(0)\cdot x + \frac{1}{2!} f''(0)\cdot x^2 + $$
$$+ a_3 \cdot x^3 + o(x^3)$$

$$\Updownarrow$$

$$f(x) - f(0) - f'(0)\cdot x - \frac{1}{2!} f''(0)\cdot x^2 - a_3 x^3 = o(x^3)$$

$$\Updownarrow$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0) - f'(0)\cdot x - \frac{1}{2!} f''(0)\cdot x^2 - a_3 x^3}{x^3} = 0$$

si tratta di scegliere a_3 in modo che valga

Assumiamo che f sia derivabile 3 volte in $x = 0$.

$$0 = \lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0) - f'(0)\cdot x - \frac{1}{2!} f''(0)\cdot x^2 - a_3 x^3}{x^3} \overset{H}{=}$$

$$\overset{H}{=} \lim_{x \to 0} \frac{f'(x) - f'(0) - f''(0)\cdot x - a_3 \cdot 3x^2}{3x^2} \overset{H}{=}$$

$$\overset{H}{=} \lim_{x \to 0} \frac{f''(x) - f''(0) - a_3 \cdot \overbrace{3\cdot 2\cdot}^{3!} x}{\underbrace{3\cdot 2}_{3!}\cdot x} =$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{f''(x) - f(0)}{3!\cdot x} - a_3 =$$

$$= \frac{1}{3!} \boxed{\lim_{x \to 0} \frac{f''(x) - f''(0)}{x}} - a_3$$

$$= \frac{1}{3!} f'''(0) - a_3$$

$$0 = \frac{1}{3!} f'''(0) - a_3$$

$$\iff \boxed{a_3 = \frac{1}{3!} f'''(0)}$$

$$f(x) = f(0) + f'(0) \cdot x + \frac{1}{2!} f''(0) \cdot x^2 +$$

$$+ \frac{1}{3!} f'''(0) \cdot x^3 + o(x^3)$$

$$= \sum_{j=0}^{3} \frac{f^{(j)}(0)}{j!} x^j + o(x^3)$$

$$\left(f^{(0)}(x) := f(x) \right)$$

Iterando il procedimento :

$$f(x) = f(0) + f'(0)\cdot x + \frac{1}{2!} f''(0)\cdot x^2 + \frac{1}{3!} f'''(0)\cdot x^3 + a_4 x^4 + o(x^4)$$

?

Se f è derivabile 4-volte in $x=0$, si prova che:

$$a_4 = \frac{1}{4!} f^{(4)}(0)$$

e quindi:

$$f(x) = f(0) + f'(0)\cdot x + \frac{1}{2!} f''(0)\cdot x^2 + \frac{1}{3!} f'''(0)\cdot x^3 + \frac{1}{4!} f^{(4)}(0)\cdot x^4 + o(x^4)$$

$$= \sum_{j=0}^{4} \frac{f^{(j)}(0)}{j!} x^j + o(x^4)$$

Si dimostra così il seguente:

<u>TEOREMA:</u> (<u>di Peano</u> in $\bar{x}=0$)

$f :]a,b[\longrightarrow \mathbb{R}$

$0 \in]a,b[$,

f derivabile <u>n-volte</u> in $\bar{x} = 0$

Si definisce polinomio di Taylor di f in $\bar{x}=0$ di grado $(\leq) n$:

$$T_n(x) = \sum_{j=0}^{n} \frac{f^{(j)}(0)}{j!} x^j$$

È l'unico polinomio di grado $\leq n$ tale che:

$$f(x) = T_n(x) + o(x^n)$$

per $x \longrightarrow 0$

Il suddetto teorema si può naturalmente estendere al caso in cui si approssimi la funzione in un punto $\bar{x} \in \mathbb{R}$ qualunque (dove ovviamente f deve essere derivabile un numero sufficiente di volte).

TEOREMA: (Teorema di Peano)

$f : \,]a,b[\, \longrightarrow \mathbb{R}$

$\bar{x} \in \,]a,b[$,

f derivabile n-volte in $\bar{x}$.

Si definisce polinomio di Taylor di f in $\bar{x}$ di grado $(\leq)$ n:

$$T_n(x) = \sum_{j=0}^{n} \frac{f^{(j)}(\bar{x})}{j!} \cdot (x-\bar{x})^j$$

È l'unico polinomio di grado $\leq n$ tale che:

$$f(x) = T_n(x) + o\left((x-\bar{x})^n\right)$$

per $x \longrightarrow \bar{x}$

Oss.: Il polinomio di Taylor in $\bar{x}$ è, a priori, una buona approssimazione di f solo vicino a $\bar{x}$.

Focalizziamoci sul caso $\bar{x} = 0$.

Iniziamo con $f(x) = e^x$, ricordando che $e^x \in C^\infty(\mathbb{R})$

Calcoliamo il polinomio di Taylor $T_n(x)$ di $f(x) = e^x$ in $\bar{x} = 0$ di grado n.

$$T_n(x) = \sum_{j=0}^{n} \frac{f^{(j)}(0)}{j!} \cdot x^j$$

$$= \sum_{j=0}^{n} \frac{1}{j!} D^j e^x \Big|_{x=0} \cdot x^j$$

$\Longrightarrow$

$$e^x = T_n(x) + o(x^n)$$

$$De^x = e^x$$

$$\Longrightarrow \quad D^j e^x = e^x \qquad \forall j$$

$$\Longrightarrow \quad D^j e^x \Big|_{x=0} = e^x \Big|_{x=0} = 1$$

$$T_n(x) = \sum_{j=0}^{n} \frac{1}{j!} D^j e^x \Big|_{x=0} \cdot x^j$$

$$= \sum_{j=0}^{n} \frac{1}{j!} x^j$$

$$\Longrightarrow$$

$$\boxed{e^x = \sum_{j=0}^{n} \frac{1}{j!} x^j + o(x^n)}$$

- $n = 1$:

$$e^x = \underbrace{1 + x}_{T_1} + o(x)$$

- $n = 2$:

$$e^x = \underbrace{1 + x + \frac{x^2}{2!}}_{T_2} + o(x^2)$$

- $n = 3$:

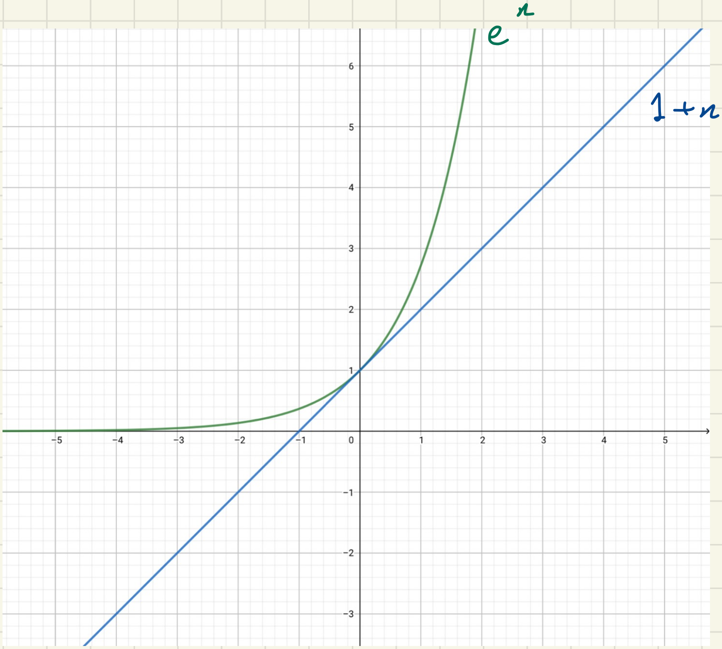
$$e^x = \underbrace{1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!}}_{T_3} + o(x^3)$$

- $n = 4$:

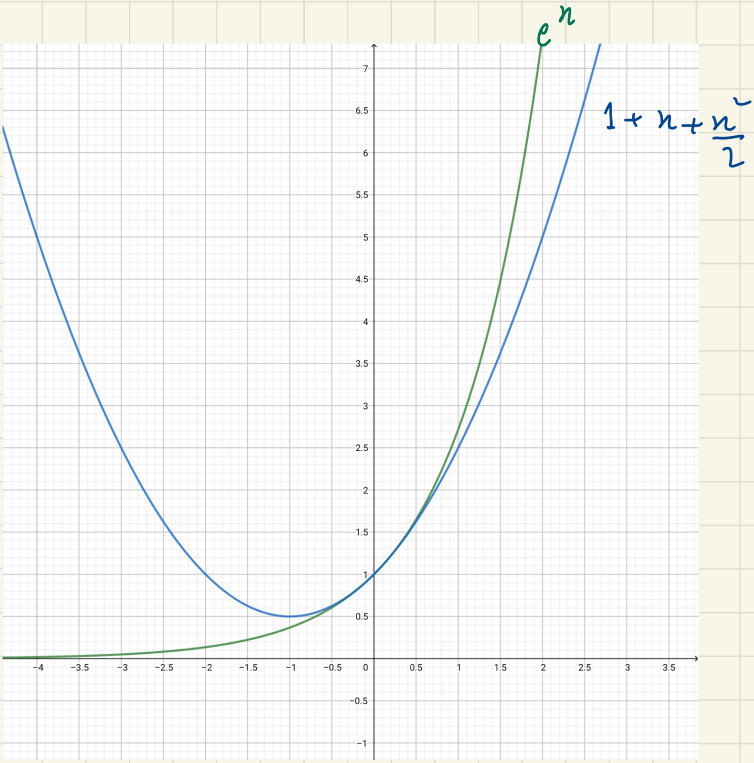
$$e^x = \underbrace{1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!}}_{T_4} + o(x^4)$$

- $n = 5$:

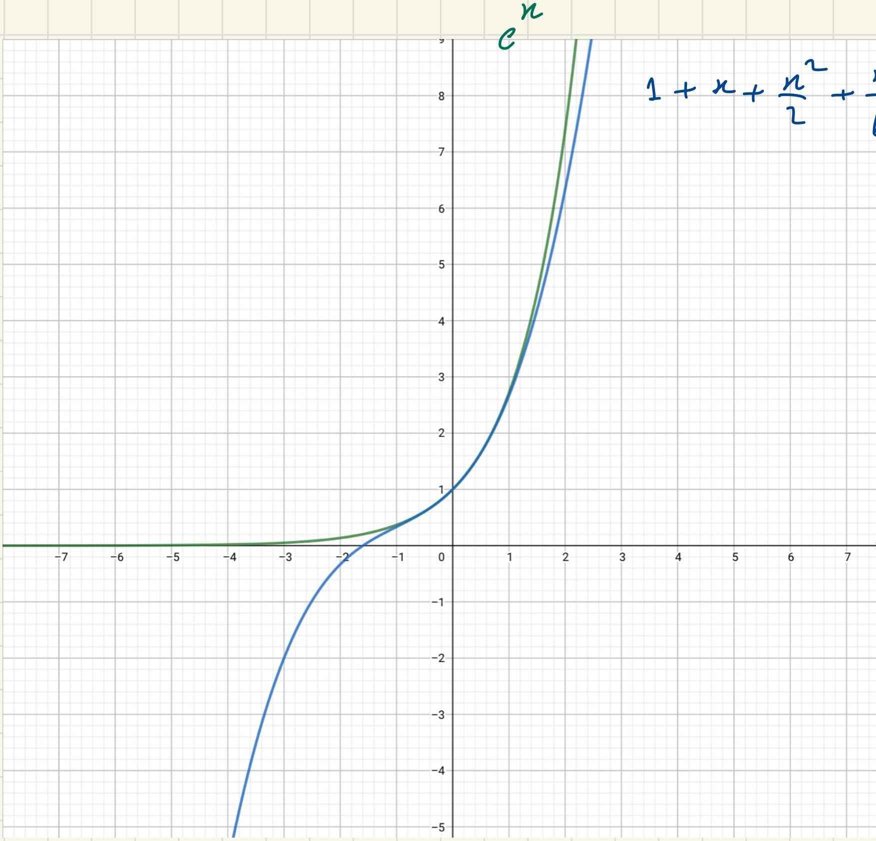
$$e^x = \underbrace{1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!}}_{T_5} + o(x^5)$$



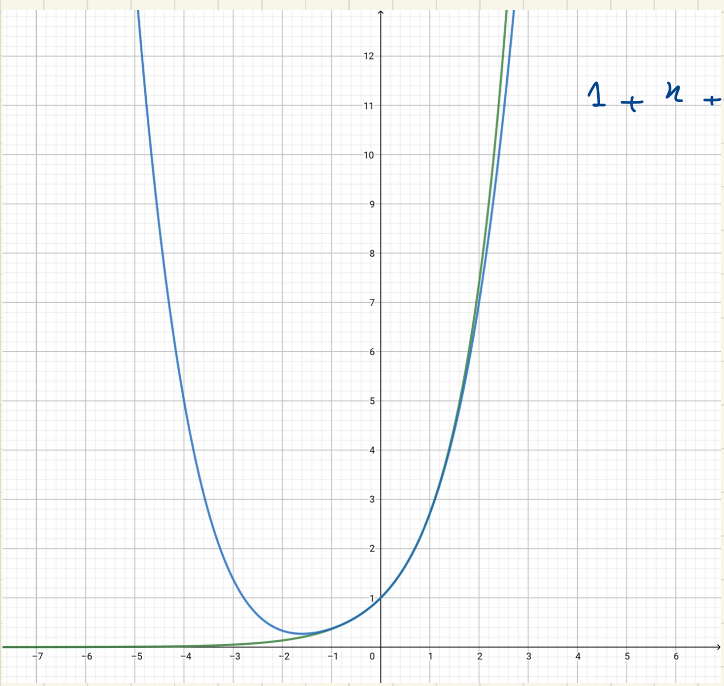
$n = 1$



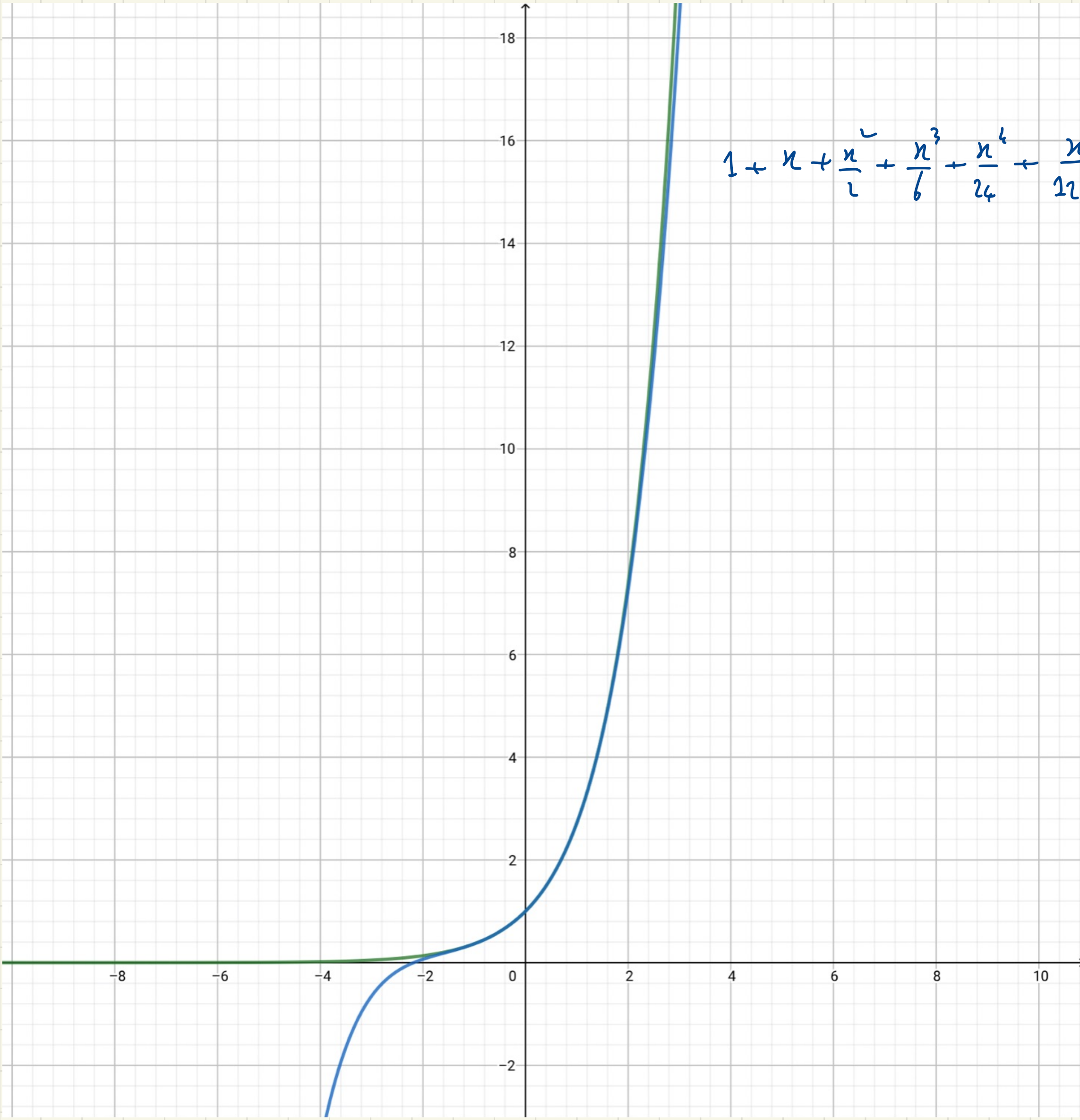
$n = 2$



$$1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6}$$



$$1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24}$$



$$1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + \frac{x^5}{120}$$

Dunque:

$$\boxed{e^t = \sum_{j=0}^{n} \frac{t^j}{j!} + o(t^n)}$$

per $t \longrightarrow 0$

Studiamo ora $\sin x \in C^{\infty}(\mathbb{R})$.

Calcoliamo il polinomio di Taylor $T_n(x)$ di $f(x) = \sin x$ in $\bar{x} = 0$ di ordine n.

$$T_n(x) = \sum_{j=0}^{n} \frac{f^{(j)}(0)}{j!} \cdot x^j$$

$$= \sum_{j=0}^{n} \frac{1}{j!} D^j \sin x \Big|_{x=0} \cdot x^j$$

$\Longrightarrow$

$$\sin x = T_n(x) + o(x^n)$$

Si ha:

$$D \sin x = \cos x \longrightarrow f'(0) = 1$$

$$D^2 \sin x = -\sin x \longrightarrow f^{(2)}(0) = 0$$

$$D^3 \sin x = -\cos x \longrightarrow f^{(3)}(0) = -1$$

$$D^4 \sin x = \sin x \longrightarrow f^{(4)}(0) = 0$$

$$\longrightarrow f^{(5)}(0) = 1$$

$$\longrightarrow f^{(6)}(0) = 0$$

$$\longrightarrow f^{(7)}(0) = -1$$

$$\vdots$$

$$\longrightarrow f^{(8)}(0) = 0$$

$$\longrightarrow f^{(9)}(0) = 1$$

$T_n(x)$ polinomio di Taylor di grado n

- $n=1$:

$$T_1(x) = \overset{0}{\overset{\|}{\sin 0}} + \frac{1}{1!} \overset{1}{\overset{\|}{D\sin x\Big|_{x=0}}} \cdot x$$

$$= x$$

$$\Longrightarrow \quad \sin x = x + o(x)$$

- $n=2$

$$T_2(x) = \overset{0}{\overset{\|}{\sin 0}} + \frac{1}{1!} \overset{1}{\overset{\|}{D\sin x\Big|_{x=0}}} \cdot x + $$

$$+ \frac{1}{2!} \underset{0}{\underset{\|}{D^2 \sin x\Big|_{x=0}}} \cdot x^2$$

$n = 2$:

$$T_2(x) = x = T_1(x)$$

ma

$$\sin x = x + 0 \cdot x^2 + o(x^2)$$

$$= x + o(x^2)$$

quindi il polinomio x è la migliore approssimazione di $\sin x$ non solo al I ordine, ma anche al II ordine (per la funzione $\sin x$).

• $n = 3$:

$$T_3(x) = \overset{0}{\overset{\shortparallel}{\sin 0}} + \frac{1}{1!} \overset{1}{\overset{\shortparallel}{D \sin x \Big|_{x=0}}} \cdot x +$$

$$+ \frac{1}{2!} \overset{0}{\overset{\shortparallel}{D^2 \sin x \Big|_{x=0}}} \cdot x^2 +$$

$$+ \frac{1}{3!} \underset{-1}{\underset{\shortparallel}{D^3 \sin x \Big|_{x=0}}} \cdot x^3$$

$$= x - \frac{x^3}{3!}$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + o(x^3)$$

- $n = 4$:

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{1}{4!} \overbrace{\left. D^4 \sin x \right|_{x=0}}^{\sin 0 = 0} \cdot x^4 + o(x^4)$$

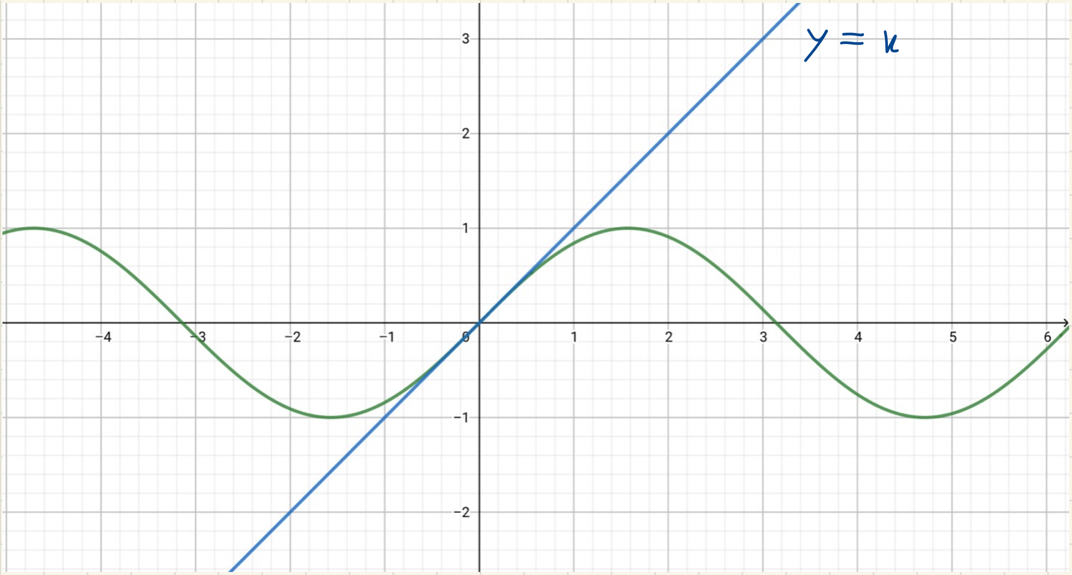
$$= x - \frac{x^3}{3!} + 0 \cdot x^4 + o(x^4)$$

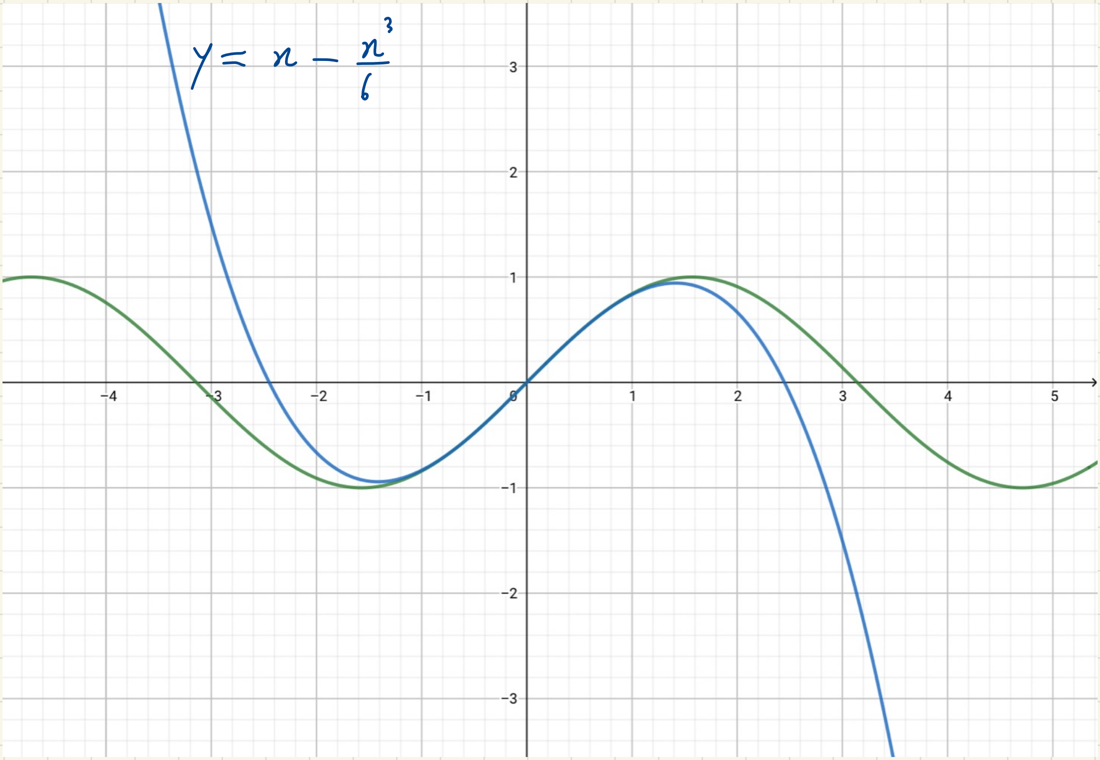
$$= x - \frac{x^3}{3!} + o(x^4)$$

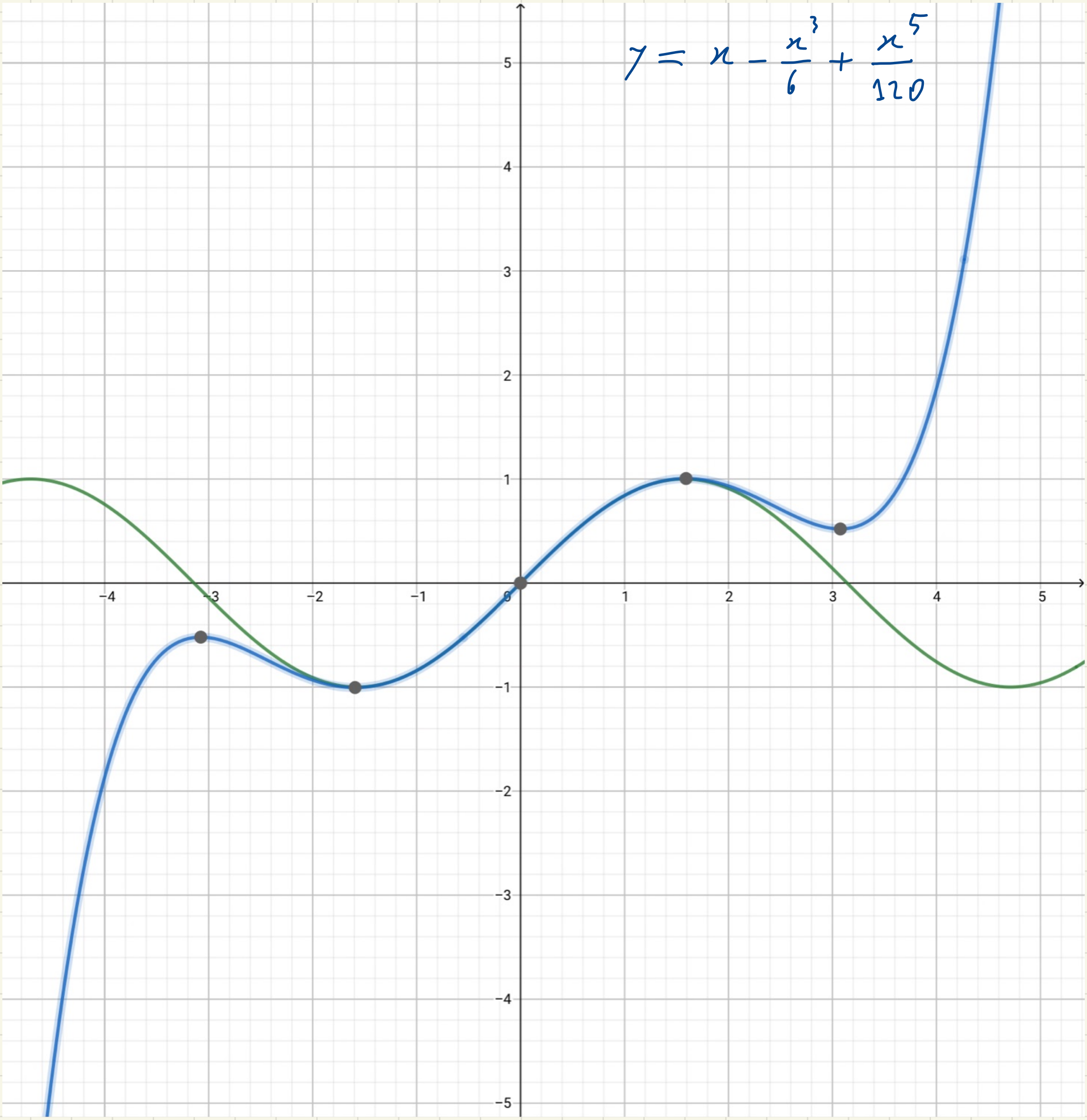
- $n = 5$:

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{1}{5!} \overbrace{\left. D^5 \sin x \right|_{x=0}}^{\cos 0 = 1} \cdot x^5 + o(x^5)$$

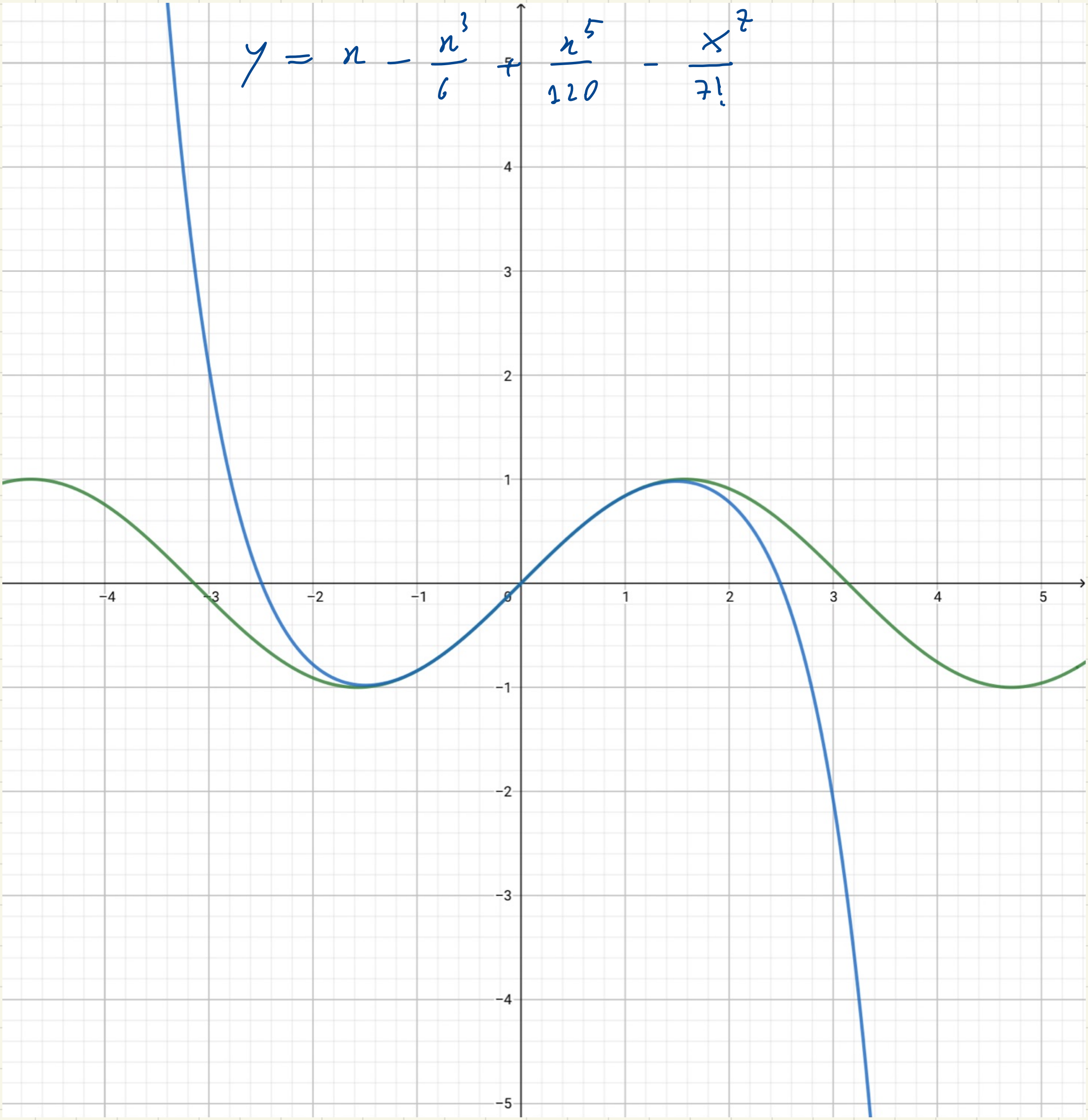
$$= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + o(x^5)$$


$y = x$
-4
-3
-2
-1
0
1
2
3
4
5
6
3
2
1
-1
-2


$y = x - \frac{x^3}{6}$
-4
-3
-2
-1
0
1
2
3
4
5
3
2
1
-1
-2
-3



$y = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120}$
-4
-3
-2
-1
0
1
2
3
4
5


$y = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} - \frac{x^7}{7!}$
4
3
2
1
−1
−2
−3
−4
−5
−4
−3
−2
−1
0
1
2
3
4
5

Dunque:

$$\boxed{\sin t = \sum_{k=0}^{m} \frac{(-1)^k \cdot t^{2k+1}}{(2k+1)!} + o\left(t^{2m+1}\right)}$$

per $x \longrightarrow 0$

<u>OSS.:</u>

Nello sviluppo di $\sin x$ in $\bar{x} = 0$ compaiono solo monomi di grado dispari poiché $\sin x$ è una funzione dispari:

$$\sin(-t) = -\sin t$$

Vediamo lo sviluppo di $\cos x$ per $\bar{x} = 0$ - $(\cos x \in C^\infty(\mathbb{R}))$

$D\cos x = -\sin x \longrightarrow D\cos x\Big|_{x=0} = 0$

$D^2\cos x = -\cos x \longrightarrow D^2\cos x\Big|_{x=0} = -1$

$D^3\cos x = \sin x \longrightarrow D^3\cos x\Big|_{x=0} = 0$

$D^4\cos x = \cos x \longrightarrow D^4\cos x\Big|_{x=0} = 1$

$D^5\cos x\Big|_{x=0} = 0$

$D^6\cos x\Big|_{x=0} = -1$

$D^7\cos x\Big|_{x=0} = 0$

...

$n=1$:

$$\cos x = 1 + o(x)$$

$n=2$:

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2)$$

$n=3$:

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + 0\,x^3 + o(x^3)$$

$$= 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^3)$$

$n=4$:

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} + o(x^4)$$

$n = 5$:

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} + 0 \cdot x^5 + o(x^5)$$

$$= 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} + o(x^5)$$

$n = 6$:

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + o(x^6)$$

Dunque:

$$\boxed{\cos t = \sum_{k=0}^{m} \frac{(-1)^k \cdot t^{2k}}{(2k)!} + o\left(t^{2m}\right)}$$

per $x \longrightarrow 0$

<u>Oss.:</u>

Nello sviluppo di $\cos x$ in $\bar{x}=0$ compaiono solo monomi di grado pari poiché $\cos x$ è una funzione pari:

$$\cos(-t) = \cos t$$

Esaminiamo $\ln x$.
Tale funzione non si può sviluppare in $\bar{x} = 0$, poiché non è ivi definita.

Si sviluppa allora la funzione:

$$\ln(1 + x) \quad \text{in } \bar{x} = 0 .$$

Perché proprio 1?

Se volessimo sviluppare $\ln x$ in $\bar{x} > 0$, osserviamo che:

$$\ln x = \ln(\bar{x} + (x - \bar{x})) =$$

$$= \ln\left(\bar{x} \cdot \left(1 + \frac{x - \bar{x}}{\bar{x}}\right)\right) =$$

$$= \underbrace{\ln \bar{x}}_{\text{costante}} + \ln\Big(1 + \overbrace{\tfrac{1}{\bar{x}}(x - \bar{x})}^{=t}\Big)$$

$$= \underbrace{\ln \bar{x}}_{\text{costante}} + \ln\Big(1 + \overbrace{\tfrac{1}{\bar{x}}(x-\bar{x})}^{=t}\Big)$$

se $x \longrightarrow \bar{x} \implies t \longrightarrow 0$

$$D \ln(1+t) = \frac{1}{1+t} = (1+t)^{-1} \longrightarrow D \ln(1+t)\Big|_{t=0} = 1$$

$$D^2 \ln(1+t) = -1(1+t)^{-2} \longrightarrow D^2 \ln(1+t)\Big|_{t=0} = -1$$

$$D^3 \ln(1+t) = -1 \cdot (-2)(1+t)^{-3} \longrightarrow D^3\Big|_{t=0} = 2!$$

$$D^4 \ln(1+t) = -3!\,(1+t)^{-4} \longrightarrow D^4\Big|_{t=0} = -3!$$

$\vdots$

$$D^n \ln(1+t) = (-1)^{n-1} \cdot (n-1)!\,(1+t)^{-n}$$

$$\longrightarrow D^n\Big|_{t=0} = (-1)^{n-1} \cdot (n-1)!$$

$$\ln(1+r) = \sum_{j=0}^{n} \frac{D^j \ln(1+r)}{j!}\Bigg|_{r=0} \cdot t^j + o(t^n)$$

$$= \underbrace{\ln(1)}_{\substack{\shortparallel \\ 0}} + \sum_{j=1}^{n} \frac{D^j \ln(1+r)}{j!}\Bigg|_{r=0} \cdot t^j + o(t^n)$$

$$= \sum_{j=1}^{n} \frac{(-1)^{j-1} \cdot (j-1)!}{j!} \cdot t^j + o(t^n) =$$

$$= \sum_{j=1}^{n} \frac{(-1)^{j-1}}{j} \cdot t^j + o(t^n)$$

$$= t - \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3} - \frac{t^4}{4} + \dots$$

$$\dots + (-1)^{n-2} \frac{t^{n-1}}{n-1} + (-1)^{n-1} \frac{t^n}{n} + o(t^n)$$

In conclusione:

$$\boxed{\ln(1+r) = \sum_{j=1}^{n} \frac{(-1)^{j-1}}{j} \cdot t^{j} + o(t^{n})}$$

per $r \to 0$

Esercizio (sui limiti)

Metodo di calcolo del limite:

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{g(x)}$$

- si analizzano numeratore e denominatore, e si inizia a sviluppare il più semplice fra i due;
- se il più semplice è il denominatore, si deve stabilire per quale $m \in \mathbb{N}$:

$$g(x) = \alpha x^m + o(x^m) \qquad (\alpha \neq 0)$$

- si sviluppa f almeno all'ordine m.

EJEMPIO (per la funzione $\not o(x)$)

$$e^x - 1 = \not o(x)$$

$$e^x = 1 + x + o(x)$$

$$e^x - 1 = \boxed{x} + o(x)$$

$\downarrow$

$$m = 1$$

$$\left(\cos^3 x - 1\right)^2 = \not o(x)$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2)$$

$$(\cos x)^3 = \left(1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2)\right)^3 =$$

$$(\cos x)^3 = \left(1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2)\right)^3 =$$

$$= \left(1 - \frac{x^2}{2} + \underbrace{o(x^2)}\right)\left(1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2)\right)\left(1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2)\right) =$$

$$= o(x^2) + \left(\underset{A}{1} - \underset{B}{\frac{x^2}{2}}\right)^3 =$$

$$= o(x^2) + \underset{(A^3)}{1} + \underset{(3A^2 \cdot B)}{3 \cdot 1^2 \cdot \left(-\frac{x^2}{2}\right)} =$$

$$= o(x^2) + 1 - \frac{3}{2}x^2$$

$$(\cos^3 x - 1)^2 = \left(o(x^2) \cancel{+1} - \frac{3}{2}x^2 \cancel{-1}\right)^2 =$$

$$= \left(-\frac{3}{2}x^2 + o(x^2)\right)^2 =$$

$$= \left(-\frac{3}{2}x^2\right)^2 + o(x^4)$$

$$= \frac{9}{4}x^4 + o(x^4) \qquad m = 4$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos x - 1 + \frac{x^2}{2} + x^4}{x^4}$$

$\Rightarrow n = 4$

si deve sviluppare il numeratore almeno di $\underline{\overline{IV}}$ ordine:

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} + o(x^4)$$

$$\frac{\cos x - 1 + \frac{x^2}{2} + x^4}{x^4} =$$

$$= \frac{\cancel{1} - \cancel{\frac{x^2}{2}} + \frac{x^4}{24} + o(x^4) - \cancel{1} + \cancel{\frac{x^2}{2}} + x^4}{x^4} =$$

$$= \frac{\frac{25}{24} x^4 + o(x^4)}{x^4} =$$

$$= \frac{25}{24} + \frac{o(x^4)}{x^4} \xrightarrow[x\to 0]{} \frac{25}{24}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{\sin x} - 1 - x - \frac{x^2}{2}}{x^3}$$

sviluppiamo il numeratore al III ordine (cioè, $o(x^3)$)

$$e^{\sin x} \qquad \sin x = t$$

$$x \longrightarrow 0 \quad \Longrightarrow \quad t = \sin x \longrightarrow 0$$

$$\sin x = x + o(x) \Longrightarrow \sin x \simeq x$$

$$\Longrightarrow \quad t = \sin x \simeq x$$

$$o(t^n) = o(\sin^n x) = o(x^n) \Longrightarrow n = 3$$

$$e^t = 1 + t + \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{6} + o(t^3)$$

$$e^{\sin x} = 1 + \sin x + \frac{1}{2}\sin^2 x + \frac{1}{6}\sin^3 x + o(x^3)$$

$$e^{\sin x} = 1 + \sin x + \frac{1}{2}\sin^2 x + \frac{1}{6}\sin^3 x + o(x^3)$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)$$

$$\sin^2 x = \left(x + o(x^2)\right)^2 =$$

$$= x^2 + 2x \cdot o(x^2) + \left(o(x^2)\right)^2$$

$$= x^2 + o(x^3) + o(x^4) = x^2 + o(x^3)$$

$$\sin^3 x = \left(x + o(x^2)\right)^3 =$$

$$= x^3 + 3x^2 o(x^2) + \ldots$$

$$= x^3 + o(x^4) = x^3 + \underline{o(x^3)}$$

$$\sin^2 x = \left(\underline{x + o(x)}\right)^2 =$$

$$= x^2 + \underbrace{2x \cdot o(x)}_{} + \underbrace{(o(x))^2}_{} =$$

$$= \underline{x^2 + \boxed{o(x^2)}} \qquad \underline{\underline{NO}}$$

$$o(x^2) \text{ è un } o(x^3) \text{ ? } \qquad \underline{\underline{NO}}$$

$$\sin^2 x = \left(\underline{x + \cancel{0 \cdot x^2} + o(x^2)}\right)^2 =$$

$$= x^2 + \underbrace{2x\, o(x^2)}_{o} + \underbrace{\left(o(x^2)\right)^2}_{o} =$$

$$= x^2 + o(x^3) + \cancel{o(x^4)}$$

$$= x^2 + o(x^3) \leftarrow \text{SI}$$

$$e^{\sin x} = 1 + \sin x + \frac{1}{2}\sin^2 x + \frac{1}{6}\sin^3 x + o(x^3)$$

$$= 1 + \left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)\right) + \frac{1}{2}\left(x^2 + o(x^3)\right) + \frac{1}{6}\left(x^3 + o(x^3)\right) + o(x^3)$$

$$= 1 + x + \frac{x^2}{2} + o(x^3)$$

$$\frac{e^{\sin x} - 1 - x - \frac{x^2}{2}}{x^3} =$$

$$= \frac{\cancel{1} + \cancel{x} + \cancel{\frac{x^2}{2}} + o(x^3) - \cancel{1} - \cancel{x} - \cancel{\frac{x^2}{2}}}{x^3} =$$

$$= \frac{o(x^3)}{x^3} \xrightarrow[x \to 0]{} 0$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin^2 x - x^2}{e^{x^4}-1} = ?$$

Più semplice $\longrightarrow$ il denominatore

$$e^{x^4} = 1 + x^4 + o(x^4)$$

$$\Longrightarrow \quad e^{x^4} - 1 = x^4 + o(x^4)$$

Si deve sviluppare il numeratore al IV ordine: (II METODO)

$$\sin^2 x = \left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)\right)^2 =$$

$$= \left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)\right)\left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)\right) =$$

$x \cdot o(x^3) = o(x^4)$

$-\frac{x^3}{6}\, o(x^3) = o(x^6)$

$(o(x^3))^2 = o(x^6)$

$$\sin^2 x = \left(\underline{x + o(x^2)}\right)^2 =$$

$$= x^2 + \underline{2x \cdot o(x^2)} + \left(o(x^2)\right)^2 =$$

$$= x^2 + \underline{o(x^3)} + \cancel{o(x^4)}$$

$$= x^2 + o(x^3) \qquad \underline{\underline{\text{WO}}}$$

$$\sin^2 x = \left(x - \frac{x^3}{6}\right)^2 + o(x^4)$$

$$= x^2 + 2x \cdot \left(-\frac{x^3}{6}\right) + \cancel{\left(-\frac{x^3}{6}\right)^2} + o(x^4) =$$

$$= x^2 - \frac{x^4}{3} + o(x^4)$$

$$\frac{\sin^2 x - x^2}{e^{x^4} - 1} = \frac{\cancel{x^2} - \frac{x^4}{3} + o(x^4) - \cancel{x^2}}{\cancel{1} + x^4 + o(x^4) - \cancel{1}} =$$

$$= \frac{-\frac{1}{3} + \frac{o(x^4)}{x^4}}{1 + \frac{o(x^4)}{x^4}} \xrightarrow[x \to 0]{} -\frac{1}{3}$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin^2 x - x^2}{e^{x^4} - 1} = -\frac{1}{3}$$