25. Novembre. 2021

INTRODUZIONE ALLO SVILUPPO IN SERIE DI TAYLOR DI UNA FUNZIONE:

DEF.:

$f: A \longrightarrow \mathbb{R}$

$x_0 \in D(A)$

$f(x)$ si dice INFINITESIMO per $x \longrightarrow x_0$ se:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = 0$$

Es.:

① x^3, $x^5 - x^2$, $\sin x^3$, $\operatorname{tg}^2 x$

sono infinitesimi per $x \to 0$

② $x^5 - x^2$ è un infinitesimo

anche per $x \to 1$, mentre

x^3, $\sin x^3$, $\operatorname{tg}^2 x$ NO.

CONFRONTO DI INFINITESIMI:

Date due funzioni:

$$f(x) \xrightarrow[x \to x_0]{} 0$$

$$g(x) \xrightarrow[x \to x_0]{} 0$$

(f, g si dicono INFINITESIMI per $x \to x_0$)

Se esiste:

$$\lim_{x \to x_0} \left| \frac{f(x)}{g(x)} \right| = L \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$$

allora si hanno i casi:

$L = 0 \longrightarrow f(x)$ è un infinitesimo di ordine superiore a $g(x)$

$0 < L \in \mathbb{R} \longrightarrow f(x)$ e $g(x)$ sono infinitesimi equivalenti

$L = +\infty \longrightarrow o(x)$ è un infinitesimo di ordine superiore a f

Esempi:

(1) $x^2 \xrightarrow[x \to 0]{} 0$

$x^4 - x^3 \xrightarrow[x \to 0]{} 0$

$$\lim_{x \to 0} \boxed{\left| \frac{x^4 - x^3}{x^2} \right|} = 0$$

$\shortparallel$

$|x^2 - x|$

$x^4 - x^3$ è un infinitesimo di ordine superiore di x^2

x	x^2	$x^3 - x^4$
0,1	0,01	0,0009
0,01	0,0001	0,00000099
0,001	10^{-6}	$9{,}99 \cdot 10^{-10}$
⋮	⋮	⋮

2

$$x^3 \xrightarrow[x \to 0]{} 0$$

$$x^6 \xrightarrow[x \to 0]{} 0$$

$$\lim_{x \to 0} \left| \frac{x^6}{x^3} \right| = \lim_{x \to 0} |x^3| = 0$$

x^6 è un infinitesimo di ordine maggiore di x^3

(3)

$$x^n \xrightarrow[x \to 0]{} 0$$

$n > m$

$$x^m \xrightarrow[x \to 0]{} 0$$

$$\lim_{x \to 0} \left| \frac{x^n}{x^m} \right| = \lim_{x \to 0} |x|^{n-m} = 0$$

(se $n > m$)

x^n infinitesimo di ordine superiore di x^m

(4)

$$\sin^3 x \xrightarrow[x\to 0]{} 0$$

$$3x^3 \xrightarrow[x\to 0]{} 0$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin^3 x}{3x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{3}\cdot\left(\frac{\sin x}{x}\right)^3 = \frac{1}{3}$$

$\sin^3 x$ e $3x^3$ sono infinitesimi equivalenti

DEF.: (o piccolo di una funzione):

$f, g : A \longrightarrow \mathbb{R}$, $x_0 \in D(A)$

$f(x) \neq 0$ se $A \setminus \{x_0\}$

$g(x) \xrightarrow[x \to x_0]{} 0$

si dice che g è un o-piccolo di f per $x \to x_0$ se:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{g(x)}{f(x)} = 0$$

In tal caso di scrive:

$$g(x) = o\big(f(x)\big) \quad \underbrace{\text{per } x \to x_0}$$

si può omettere se è chiaro dal contesto!

Esempio:

$$f(x) = x^2$$

- $\sin^3 x = o(x^2)$

$$\Updownarrow$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin^3 x}{x^2} = 0$$

$$\left(\lim_{x\to 0} x \cdot \frac{\sin^3 x}{x^3} = \right.$$

$$\left. = \lim_{x\to 0} x \cdot \left(\frac{\sin x}{x}\right)^3 = 0 \right)$$

- $4x^4 = o(x^2)$

$$\lim_{x\to 0} \frac{4x^4}{x^2} = \lim_{x\to 0} 4x^2 = 0$$

In modo prossolano:

$$\varphi(x) = o\big(f(x)\big) \quad x \to x_0$$

significa che:

$\varphi(x) \xrightarrow[x \to x_0]{} 0$ più velocemente di $f(x)$

Esempio:

$x_0 = 0$

x^2 è un o-piccolo di $\sin x$ per $x \longrightarrow 0$

Infatti:

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^2}{\sin x} = \lim_{x\to 0} \underset{\downarrow \atop 0}{x} \cdot \underset{\downarrow \atop 1}{\frac{x}{\sin x}} = 0$$

$$\Longrightarrow \quad x^2 = o(\sin x)$$

Ma $x^2 \neq o(\sin^2 x)$, infatti

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^2}{\sin^2 x} = 1 \neq 0$$

$$\lim_{x\to 0} \left(\frac{x}{\sin x}\right)^2 = \lim_{x\to 0} \frac{1}{\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2} = 1$$

- x^5 è un o-piccolo di x^3

Infatti:

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^5}{x^3} = \lim_{x\to 0} x^2 = 0$$

$$\Longrightarrow \quad x^5 = o(x^3) \quad \text{per } x \to 0$$

- x^5 è un o-piccolo di x^4

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^5}{x^4} = \lim_{x\to 0} x = 0$$

$$\Longrightarrow \quad x^5 = o(x^4) \quad \text{per } x \to 0$$

- In generale x^5 è un o-piccolo di x, x^2, x^3, x^4 per $x \to 0$

$x^5 = o(x)$, $x^5 = o(x^2)$, $x^5 = o(x^3)$

$x^5 = o(x^4)$ $\quad [\; x^5 \neq o(x^5), o(x^6) \dots]$

- x^n è un o-piccolo (per $x \to 0$) di x^m se $m < n$:

$$\lim_{x \to 0} \frac{x^n}{x^m} = \lim_{x \to 0} x^{n-m} = 0$$

$$\Longrightarrow \quad x^n = o(x^m) \quad \forall\, m \in \mathbb{N} : m < n$$

- Dire che $f(x) = o(1)$ per $x \to x_0$ significa che:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{1} = 0$$

$$\parallel$$

$$\lim_{x \to x_0} f(x)$$

cioè: $f(x) = o(1)$ significa che $f(x) \longrightarrow 0$ per $x \longrightarrow x_0$.

- $(x^6 - x^4)^2$ è un o-piccolo di x^6 se $x \to 0$

$$\lim_{x\to 0} \frac{(x^6-x^4)^2}{x^6} = \lim_{x\to 0} \frac{x^8(x^2-1)^2}{x^6} =$$

$$= \lim_{x\to 0} x^2(x^2-1)^2 = 0$$

$(x^6-x^4)^2 = o(x^6)$, $(x^6-x^4)^2 = o(x^7)$

$(x^6-x^4)^2 \neq o(x^8)$

$$\lim_{x\to 0} \frac{(x^6-x^4)^2}{x^7} = \lim_{x\to 0} \frac{x^8(x^2-1)^2}{x^7} =$$

$$= \lim_{x\to 0} x(x^2-1)^2 = 0$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{(x^6-x^4)^2}{x^8} = \lim_{x\to 0} \frac{\cancel{x^8}(x^2-1)^2}{\cancel{x^8}} = 1 \neq 0$$

- $(x^6 - x^4)^2$ è un o-piccolo di $x-1$ se $x \to 1$

$$\lim_{x\to 1} \frac{(x^6 - x^4)^2}{x-1} = \lim_{x\to 1} \frac{x^8 (x^2-1)^2}{(x-1)} =$$

$$= \lim_{x\to 1} x^4 (x+1)^2 (x-1) = 0$$

$(x^6 - x^4)^2 = o(x-1)$ per $x \to 1$

PROPRIETÀ ALGEBRICHE DEGLI

O-PICCOLI (per $x \to 0$)

$(n, m \in \mathbb{N})$

① $f = o(x^n) \implies f = o(x^m) \quad m < n$

Infatti:

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{x^m} = \lim_{x\to 0} \underbrace{x^{n-m}}_{\to 0} \cdot \underbrace{\frac{f(x)}{x^n}}_{\to 0} = 0$$

② $o(x^n) \pm o(x^n)$ è un $o(x^n)$

(nel senso che:

$f_1 = o(x^n)\,,\ f_2 = o(x^n) \implies f_1 \pm f_2 = o(x^n)$)

Esempio:

$x^4 = o(x^3) \qquad x^5 = o(x^3)$

$\implies 0 \neq x^4 - x^5 = o(x^3)$

$$o(n^4) - \underset{\underset{o(n^4)}{\shortparallel}}{o(n^6)} = o(n^4)$$

$$o(n^4) + o(n^4) = \cancel{2\,o(n^4)}$$

$$o(n^4)$$

$$3n^5 = o(n^3)$$

$$6n^6 = o(n^3)$$

$$\underbrace{3n^5 + 6n^6}\, = \,?$$

$$= \underline{o(n^3)}$$

$$o(n^3) - o(n^3) \neq 0$$

$$4n^4 = o(n^3)$$

$$n^9 = o(n^3)$$

$$4n^4 - n^9 \neq 0$$

$$= o(n^3)$$

3) $x^m \cdot o(x^n)$ è un $o(x^{n+m})$

4) $o(x^m) \cdot o(x^n)$ è un $o(x^{m+n})$

5) $(o(x^n))^m$ è un $o(x^{n \cdot m})$

(segue da 4)

6) $o(o(x^n))$ è un $o(x^n)$

(nel senso che se:

$$g = o(f) \text{ e } f = o(x^n) \Longrightarrow g = o(x^n)$$

Infatti:

$$\lim_{x \to 0} \frac{g(x)}{x^n} = \lim_{x \to 0} \frac{g(x)}{f(x)} \cdot \frac{f(x)}{x^n} = 0$$

$\qquad 0 \qquad\qquad 0$

⑦ $o\left(x^n + o(x^m)\right)$ è un $o(x^n)$ $(m \geq n)$

$$\left(f = o\left(x^n + \varphi(x)\right),\ \varphi(x) = o(x^m) \Longrightarrow f = o(x^n) \right)$$

$$\downarrow ①$$

$$\varphi(x) = o(x^n)$$

Infatti:

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{x^n} = \lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{x^n + \varphi(x)} \cdot \frac{x^n + \varphi(x)}{x^n} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \underbrace{\boxed{\frac{f(x)}{x^n + \varphi(x)}}}_{\downarrow\ 0} \cdot \left(1 + \underbrace{\frac{\varphi(x)}{x^n}}_{\downarrow\ 0}\right) = 0$$

⑧ $o\left(x^n + \alpha \cdot x^{n+m}\right) = o(x^n)$ $(K \in \mathbb{R} : K \neq 0)$ $(\alpha \in \mathbb{R})$ $(m > 0)$

Infatti: $f = o\left(x^n + \alpha x^{n+m}\right)$

$$\longrightarrow \lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{x^n} = \lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{x^n + \alpha x^{n+m}} \cdot \frac{x^n + \alpha x^{n+m}}{x^n}$$

$$\longrightarrow \lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{x^n} = \lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{x^n+\alpha x^{n+m}} \cdot \boxed{\frac{x^n+\alpha x^{n+m}}{x^n}} = 0$$

$$\frac{f(x)}{x^n+\alpha x^{n+m}} \to 0, \qquad \boxed{\frac{x^n+\alpha x^{n+m}}{x^n}} = 1 \to 0$$

$$\Longrightarrow f(x) = o(x^n)$$

Viceversa:

se $\varphi = o(x^n)$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\varphi(x)}{x^n+\alpha x^{n+m}} = \lim_{x\to 0} \frac{\varphi(x)}{x^n} \cdot \boxed{\frac{x^n}{x^n+\alpha x^{n+m}}} = 0$$

$$\frac{\varphi(x)}{x^n} \to 0, \qquad \boxed{\frac{x^n}{x^n+\alpha x^{n+m}}} = \frac{1}{1+\alpha x^m} \longrightarrow 1$$

$$\Longrightarrow \varphi = o(x^n+\alpha x^{n+m})$$

8' $\quad o(x^n+\alpha x^{n+m}+\beta x^{n+p}+\dots) = o(x^n)$

	$o(x)$	$o(x^2)$	$o(x^3)$	$o(x^4)$
x	x^2	x^3	x^4	x^5
$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{100}$	$\frac{1}{1000}$	$\frac{1}{10.000}$	$\frac{1}{100.000}$
$\frac{1}{100}$	$\frac{1}{10.000}$	$\frac{1}{10^6}$	$\frac{1}{10^8}$	$\frac{1}{10^{10}}$

$$\boxed{x \longrightarrow 0}$$

L' idea guida è quella di

relazionare dentro l'o-piccolo

la quantità "più grande"

Es.:

- $o\left(x^6 - 7x^{10}\right) = o\left(x^6\right)$

- $o\left(\left(x^4 - x^6\right)^2\right) = o\left(\left(x^4\right)^2\right) = o\left(x^8\right)$

- $o\left(\left(x^3 - 5x^4\right)^3 \cdot \left(x^4 + 7x^5\right)\right) =$

$= o\left(\left(x^3\right)^3 \cdot x^4\right) = o\left(x^{13}\right)$

g) $$\frac{o(x^n)}{x^m} = o(x^{n-m}) \quad (\text{se } m \leq n)$$

Infatti:

$$f = \frac{o(x^n)}{x^m}$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{x^{n-m}} = \lim_{x \to 0} \underbrace{\boxed{\frac{f(x)}{x^n}}}_{\to 0} \cdot \underbrace{x^m}_{\to 0} = 0$$

$$\Longrightarrow \quad f(x) = o(x^{n-m})$$

Viceversa: se $\varphi(x) = o(x^{n-m})$

si deve mostrare che:

$$\varphi(x) = \frac{o(x^n)}{x^m}, \text{ ossia } x^m \cdot \varphi(x) = o(x^n)$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{x^m \cdot \varphi(x)}{x^n} = \lim_{x \to 0} \frac{\varphi(x)}{x^{n-m}} = 0$$

$$\Longrightarrow \quad x^m \cdot \cancel{o(x)} = o\left(x^{n-m}\right)$$

$$\Longrightarrow \quad \cancel{o(x)} = \frac{o\left(x^{n-m}\right)}{x^m}$$

10

$$K \in \mathbb{R} : K \neq 0$$

$$o\left(K \cdot x^n\right) = o\left(x^n\right)$$

Infatti:

$$f = o\left(K \cdot x^n\right)$$

$$\Longrightarrow \quad \lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{x^n} = \lim_{x \to 0} \underbrace{\boxed{\frac{f(x)}{K x^n}}}_{0} \cdot K = 0$$

$$\Longrightarrow \quad f(x) = o\left(x^n\right)$$

Analogamente il viceversa.

(11)

f, g sono 2 funzioni infinitesime per $x \to x_0$

(cioè: $f(x), g(x) \xrightarrow[x \to x_0]{} 0$)

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \ell \neq 0$$

(cioè: f, g sono infinitesimi equivalenti)

Allora:

$$o(f(x)) = o(g(x))$$

Infatti:

se $h(x) = o(f) \overset{?}{\Longrightarrow} h(x) = o(g)$

$$\lim_{x \to x_0} \frac{h(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0} \underbrace{\frac{h(x)}{f(x)}}_{\downarrow\, 0} \cdot \underbrace{\frac{f(x)}{g(x)}}_{= \ell} = 0$$

$$\text{se} \quad h(x) = o(\varphi) \overset{?}{\Longrightarrow} h(x) = o(f)$$

$$\lim_{x \to x_0} \frac{h(x)}{\varphi(x)} = \lim_{x \to x_0} \underbrace{\frac{h(x)}{f(x)}}_{\to 0} \cdot \underbrace{\frac{f(x)}{\varphi(x)}}_{\to \frac{1}{e}} = 0$$

12

se $h(x) \xrightarrow[x \to 0]{} K \neq 0$

$$\Longrightarrow \quad o\left(h(x) \cdot x^n\right) \text{ è un } o(x^n)$$

Infatti:

x^n, $x^n h(x)$ sono infinitesimi equivalenti

$$\lim_{x \to 0} \frac{x^n h(x)}{x^n} = K \neq 0$$

$$\Longrightarrow \quad o\left(x^n \cdot h(x)\right) = o\left(x^n\right)$$

<u>Esempio</u>:

$$o\Big(\underbrace{(x^2+1)}_{\substack{\downarrow\, x \to 0 \\ 1 \neq 0}} \cdot x^3\Big) = o\left(x^3\right)$$

Esempio:

$$o(x^6 \cdot \cos x)$$

$$\cos x \xrightarrow[x \to 0]{} 1 \neq 0$$

$$o(x^6 \cdot \cancel{\cos} x) \longrightarrow o(x^6)$$

$$o(\underbrace{x^4 \cdot e^x + x^7 \cdot \cos^2 x - 7x^9}_{\shortparallel}) =$$

$$x^4(\underbrace{e^x + x^3 \cos x - 7x^5}_{\shortparallel})$$

$$h(x) \xrightarrow[x \to 0]{} 1 \neq 0$$

$$\longrightarrow o(x^4)$$

Esempi ed esercizi:

A $\quad o(x^2 - x^3 + x^{10}) = \,?$

I MODO:

Usando la 8':

$$o(x^2 - x^3 + x^{10}) = o(x^2)$$

II MODO: da 11

$$o(\underbrace{x^2 - x^3 + x^{10}}) = o(x^2)$$

$$\| $$

$$x^2 \underbrace{(1 - x + x^8)}$$

$$\Big\downarrow x \to 0$$

$$1 \neq 0$$

B

$$o\left((x - x^2 + x^3)^2\right) = o(\,?\,)$$

$$(x - \cancel{x^2} + \cancel{x^3})^2 \longrightarrow x^2$$

$$o\left((x - x^2 + x^3)^2\right) = o(x^2)$$

A livello operativo:

$$o\left((x - x^2 + x^3)^2\right) = o(x^2)$$

è l'addendo "più grande"

(c)

$$o\left(\underbrace{(5n^3 - 4n^6 + 9n^8)^3}_{\parallel} \right) = \, ?$$

$$x^9 \underbrace{(5 - 4n^3 + 9n^5)^3}_{\downarrow \; 5^3 \neq 0}$$

$$o\left((5n^3 - 4n^6 + 9n^8)^3 \right) = o(x^9)$$

D) Dire che $\varphi = o(1)$ per $x \to x_0$ significa che:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{\varphi(x)}{1} = 0$$

$$\shortparallel$$

$$\lim_{x \to x_0} \varphi(x)$$