22 Novembre 2021

Introdurremo ora i teoremi di De L'Hopital.

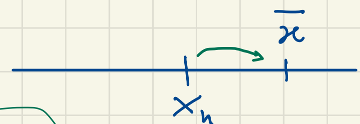
A tal fine sarà utile il seguente lemma, che "traduce" la nozione di limite usando le successioni.

LEMMA: (*)

$h : A \longrightarrow \mathbb{R}$, $\quad \bar{x} \in D(A)$

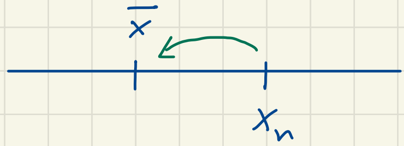
Allora: $\left(\text{"} \ell \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\} \cup \{-\infty\} \text{"} \right)$

(1) $\displaystyle \lim_{x \to \bar{x}^-} h(x) = \ell \iff$



$$\iff \begin{cases} \forall (x_n)_n \subseteq A, \quad x_n < \bar{x} \ \forall n \\ \text{tale che: } x_n \xrightarrow[n]{} \bar{x} \\ \text{si ha:} \\ h(x_n) \xrightarrow[n]{} \ell \end{cases}$$

② $\lim_{x \to \bar{x}^{+}} h(x) = \ell \iff$



$$\iff \left\{ \begin{array}{l} \forall (x_n)_n \subseteq A, \quad x_n > \bar{x} \quad \forall n \\ \quad \text{tale che: } x_n \xrightarrow[n]{} \bar{x} \\ \text{si ha:} \\ \quad h(x_n) \xrightarrow[n]{} \ell \end{array} \right.$$

Senza dimostrazione

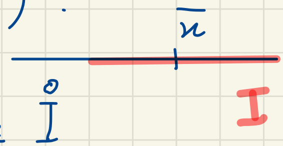
Da ① e ② segue:

③ $\lim_{x \to \bar{x}} h(x) = \ell \iff$

$$\iff \left\{ \begin{array}{l} \forall (x_n)_n \subseteq A, \quad x_n \neq \bar{x} \quad \forall n \\ \quad \text{tale che: } x_n \xrightarrow[n]{} \bar{x} \\ \text{si ha:} \\ \quad h(x_n) \xrightarrow[n]{} \ell \end{array} \right.$$

I TEOREMI DI DE L'HOPITAL:

1° CASO (limite al finito):



I intervallo $\subseteq \mathbb{R}$, $\bar{x} \in \overset{\circ}{I}$

① $f, g : I \longrightarrow \mathbb{R}$ continue

$$f(\bar{x}) = g(\bar{x}) = 0$$

$$\left(g(x) \neq 0 \text{ se } x \in I \setminus \{\bar{x}\} \right)$$

② f, g sono derivabili in $I \setminus \{\bar{x}\}$

e $g'(x) \neq 0$ se $x \in I \setminus \{\bar{x}\}$

③ $\exists \lim\limits_{x \to \bar{x}} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = l \in$ "$\mathbb{R} \cup \{+\infty\} \cup \{-\infty\}$"

Allora: $\exists \lim\limits_{x \to \bar{x}} \dfrac{f(x)}{g(x)}$ e vale

$$\boxed{\lim_{x \to \bar{x}} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to \bar{x}} \frac{f'(x)}{g'(x)}}$$

Oss.:

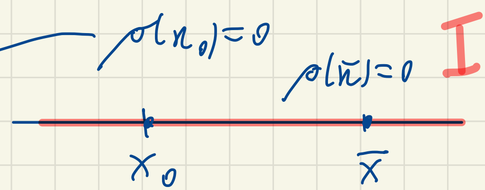
~~Perché~~ la richiesta

$$f(x) \neq 0 \quad \forall x \in I \setminus \{\bar{x}\}$$

può essere omessa.

Supponiamo che $\exists\, x_0 \in I : x_0 \neq \bar{x}$

$f(x_0) = 0$.



$f : [x_0, \bar{x}] \longrightarrow \mathbb{R}$

- 1 $\rightarrow$ f è continua in $[x_0, \bar{x}]$
- 2 $\rightarrow$ f è derivabile su $]x_0, \bar{x}[$

$f(x_0) = 0 = f(\bar{x})$

Dal teorema di Rolle:

$$\exists\, c \in \left]x_0, \bar{x}\right[: \varphi'(c) = 0$$

è in contraddizione con l'ip. 2

DIM.:

Posto $\ell = \lim_{x\to\bar{x}} \frac{f'(x_n)}{g'(x_n)}$ si tratta

di provare che:

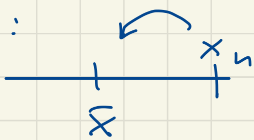
$$\boxed{\lim_{x\to\bar{x}^-} \frac{f(x)}{g(x)} = \ell} \quad \text{e} \quad \boxed{\lim_{x\to\bar{x}^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \ell}$$

(1) (2)

Proveremo (2) ((1) è analogo).

A tal fine, usando il lemma precedente,

si tratta di mostrare che:

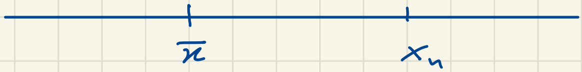


$$\forall\, (x_n)_n \subseteq I \text{ t.c. } \bar{x} < x_n \quad \forall n$$

$$x_n \xrightarrow[n]{} \bar{x}$$

si abbia:

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{f(x_n)}{g(x_n)} = \ell$$



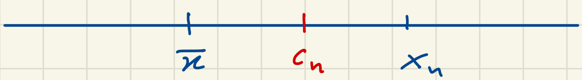
A tale scopo osserviamo che:

$$\frac{f(x_n)}{g(x_n)} = \frac{f(x_n) - f(\bar{x})}{g(x_n) - g(\bar{x})} \qquad \text{(dall'ipotesi 1)}$$

Possiamo applicare il teorema di Cauchy $f, g : [\bar{x}, x_n] \longrightarrow \mathbb{R}$ e ottenere:

$$\exists \; c_n \in \;]\bar{x}, x_n[\quad \text{t.c.}$$

$$\frac{f(x_n) - f(\bar{x})}{g(x_n) - g(\bar{x})} = \frac{f'(c_n)}{g'(c_n)}$$



$$\begin{array}{ccccc} \bar{x} & < & c_n & < & x_n \\ \downarrow & & & & \downarrow {\scriptstyle n \to +\infty} \\ \bar{x} & & & & \bar{x} \end{array} \quad \Longrightarrow \quad c_n \xrightarrow[n]{} \bar{x}$$

Dall' ipotesi (3) del teorema:

$$\lim_{x \to \bar{x}^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = l$$

dunque dal lemma (*):

$$\left.\begin{array}{l} c_n \longrightarrow \bar{x} \\ \bar{x} < c_n \end{array}\right. \implies \lim_{n \to +\infty} \frac{f'(c_n)}{g'(c_n)} = l$$

Quindi:

$$\frac{f(x_n)}{g(x_n)} = \frac{f(x_n) - f(\bar{x})}{g(x_n) - g(\bar{x})} = \frac{f'(c_n)}{g'(c_n)} \xrightarrow{n \to +\infty} l$$

$$\implies \lim_{n \to +\infty} \frac{f(x_n)}{g(x_n)} = l$$

lemma (*)

$$\implies \lim_{x \to \bar{x}^+} \frac{f(x)}{g(x)} = l = \lim_{x \to \bar{x}} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Analogamente si prova che:

$$\lim_{x \to \bar{x}^-} \frac{f(x)}{g(x)} = l = \lim_{x \to \bar{x}} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Da cui:

$$\lim_{x \to \bar{x}} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to \bar{x}} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

OSS.:

Il teorema di De L'Hopital afferma che:

se $\exists \lim_{x \to \bar{x}} \frac{f'(x)}{g'(x)}$

allora: (A) $\exists \lim_{x \to \bar{x}} \frac{f(x)}{g(x)}$

(B) $\lim_{x \to \bar{x}} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to \bar{x}} \frac{f'(x)}{g'(x)}$

NON VALE IL VICEVERSA !!

Per mostrare questo consideriamo le funzioni:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x} & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

$$g(x) = x$$

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x} & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

$$g(x) = x$$

Faremo vedere che

$$\nexists \lim_{x \to 0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Tuttavia:

$$\exists \lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{g(x)}$$

(<u>Nota</u>: $\lim_{x \to 0} f(x) = 0$, $\lim_{x \to 0} g(x) = 0$

$\Rightarrow$ $\frac{f(x)}{g(x)}$ Forma indeterminata per $x \to 0$)

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to 0} x \cdot \sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0$$

$$0 \leq \left| x \cdot \sin\left(\frac{1}{x}\right) \right| \leq |x| \xrightarrow{x \to 0} 0$$

se $x \neq 0$:

$$f'(x) = D\left(x^2 \sin \frac{1}{x}\right) =$$

$$= 2x \cdot \sin \frac{1}{x} + x^2 \cdot \cos\left(\frac{1}{x}\right) \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right)$$

$$= 2x \cdot \sin \frac{1}{x} - \cos\left(\frac{1}{x}\right)$$

$$g'(x) = 1$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{f'(x)}{g'(x)} =$$

$$= \lim_{x \to 0} \left[\underbrace{2x \cdot \sin \frac{1}{x}}_{\to 0} - \boxed{\cos\left(\frac{1}{x}\right)} \right]$$

non ha limite

$$\nexists \lim_{x \to 0} \cos \frac{1}{x}$$

$$\Longrightarrow \nexists \lim_{x \to 0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Per mostrare che non esiste

$$\nexists \lim_{x \to 0} \cos \frac{1}{x}$$

si usa il lemma (*) ② visto all'inizio della lezione.

Per contraddizione, assumiamo che:

$$\text{esista} \quad \lim_{x \to 0} \cos \frac{1}{x} = \ell$$

Allora, da ② lemma (*):

$$\boxed{\forall} \, (x_n)_n \subseteq A, \quad x_n > \overline{x} \ \forall n$$

$$\text{tale che: } x_n \xrightarrow[n]{} \overline{x}$$

si ha:

$$h(x_n) \xrightarrow[n]{} \ell$$

Mostreremo che $\exists\, (x_n)_n, (y_n)_n$ t.c.

$$x_n \xrightarrow[n]{} \bar{x}, \quad y_n \xrightarrow[n]{} \bar{y}, \quad \bar{x} < x_n, y_n \ \forall n$$

su cui $\cos \frac{1}{n}$ tende a limiti diversi

$$x_n = \frac{1}{2\pi \cdot n} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$$

$$\cos \frac{1}{x_n} = \cos \frac{1}{\left(\frac{1}{2\pi \cdot n}\right)} = \cos\left(2\pi \cdot n\right) = 1$$

$$\Longrightarrow \lim_{n \to +\infty} \cos \frac{1}{x_n} = 1$$

$$y_n = \frac{1}{\frac{\pi}{2} + 2\pi \cdot n} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$$

$\neq$

$$\cos \frac{1}{y_n} = \cos\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi \cdot n\right) = 0$$

$$\lim_{n \to +\infty} \cos \frac{1}{y_n} = 0$$

Pertanto : $\nexists \lim_{x \to 0^+} \cos \frac{1}{x}$

e quindi neppure :

$$\lim_{x \to 0} \cos \frac{1}{x}$$

verificate
condizionate

Esempio:

- $$\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} \overset{H}{=} \lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{2x} =$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{1}{2} \cdot \frac{\sin x}{x} = \frac{1}{2}$$

- $$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x - x}{x^3} \overset{H}{=} \lim_{x \to 0} \frac{\cos x - 1}{3x^2} =$$

$$= \lim_{x \to 0} -\frac{1}{3} \cdot \frac{1 - \cos x}{x^2} = -\frac{1}{6}$$

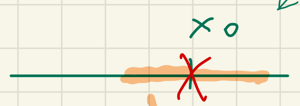
2° Caso (limite al finito)

$$f, g : \,]a,b[\, \setminus \{x_0\} \longrightarrow \mathbb{R} \quad \text{derivabili}$$

1. $\displaystyle \lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} g(x) = +\infty$ $(-\infty)$

2. $g'(x) \neq 0 \quad \forall x \in \,]a,b[\, \setminus \{x_0\}$

3. $\displaystyle \exists \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$



$g(x) \neq 0$

Allora:

- $g(x) \neq 0$ per $x \to x_0$;
- $\displaystyle \exists \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$ e vale $\displaystyle \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$.

3° Caso (limite al finito)

$f, g :]a,b[\longrightarrow \mathbb{R}$ derivabili

① $\lim_{\substack{x \to a^+ \\ (x \to b^-)}} f(x) = \lim_{\substack{x \to a^+ \\ (x \to b^-)}} g(x) = +\infty$ $(-\infty)$ (0)

② $g'(x) \neq 0 \quad \forall x \in]a,b[$

③ $\exists \lim_{\substack{x \to a^+ \\ (x \to b^-)}} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$

Allora:

- $g(x) \neq 0$ per $x \to a^+$ $(x \to b^-)$
- $\exists \lim_{\substack{x \to a^+ \\ (x \to b^-)}} \frac{f(x)}{g(x)}$

e vale $\lim_{x \to a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)}$

4° Caso (Caso all'infinito):

$f, g :]c, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ derivabili

$(]-\infty, c[)$

① $\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} g(x) = +\infty$ $(-\infty)$ (0)

$(x \to -\infty)$ $(x \to -\infty)$

② $g'(x) \neq 0 \quad \forall x \in]c, +\infty[$

$(]-\infty, c[)$

③ $\exists \lim_{x \to +\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$

$(x \to -\infty)$

Allora:

- $g(x) \neq 0$ per $x \longrightarrow +\infty$ $(x \to -\infty)$

- $\exists \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{g(x)}$ e $\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to +\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}$

$(x \to -\infty)$ $(x \to -\infty)$ $(x \to -\infty)$

Esempi:

Ⓐ $(\alpha > 0)$

$$\lim_{x\to 0^+} x^\alpha \cdot \ln x = \lim_{x\to 0^+} \frac{\overbrace{\ln x}^{\to -\infty}}{\underbrace{x^{-\alpha}}_{\to +\infty}} \overset{H}{=}$$

$$\overset{H}{=} \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{(-\alpha)\cdot x^{-\alpha-1}} = 0$$

$$= -\frac{1}{\alpha} \cdot \frac{x^{\alpha+1}}{x}$$

$$= -\frac{1}{\alpha} \cdot x^\alpha \longrightarrow 0$$

CONFRONTO DI INFINITI:

Se abbiamo due funzioni:

$$f(x) \xrightarrow[x \to +\infty]{} +\infty$$

$$g(x) \xrightarrow[x \to +\infty]{} +\infty$$

(f e g si dicono <u>INFINITI</u>)

Per capire quale delle due tende a $+\infty$ più velocemente, si studia il limite (se esiste)

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = L \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$$

(<u>nota</u>: se L esiste $\Longrightarrow L \in \mathbb{R} : L \geq 0$ oppure $L = +\infty$)

Se

$L = 0 \longrightarrow g(x)$ è un infinito di ordine superiore a f

$0 < L \in \mathbb{R} \longrightarrow f(x)$ e $g(x)$ sono infiniti equivalenti

$L = +\infty \longrightarrow f$ è un infinito di

ordine superiore a g

Esempio:

$f(x) = x^3 \longrightarrow +\infty$

$g(x) = x^2 + 1 \longrightarrow +\infty$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x^3}{x^2+1} = \lim_{x \to +\infty} \underbrace{\frac{x^3}{x^2}}_{= x} \cdot \frac{1}{1 + \frac{1}{x^2}} = +\infty$$

f è un infinito $>$ di g

"Gerarchia" degli infiniti:

(B) $(\alpha > 0)$ $\quad x^{\alpha} \xrightarrow[x \to +\infty]{} +\infty$

$$\ln x \xrightarrow[x \to +\infty]{} +\infty$$

Per confrontare la velocità con cui x^{α}, $\ln x$ divergono a $+\infty$ si studia il limite del rapporto

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x^{\alpha}}{\ln x} \stackrel{H}{=} \lim_{x \to +\infty} \frac{\alpha \cdot x^{\alpha-1}}{\frac{1}{x}} =$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \alpha \cdot x^{\alpha} = +\infty$$

x^{α} è un infinito di ordine superiore risp. a $\ln x$, $\forall \alpha > 0$

ⓒ x^{α} $(\alpha > 0)$, $\ln^2 x \xrightarrow[x \to +\infty]{} +\infty$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x^{\alpha}}{\ln^2 x} \overset{H}{=} \lim_{x \to +\infty} \frac{\alpha \cdot x^{\alpha - 1}}{2 \cdot \ln x \cdot \frac{1}{x}} =$$

$$= \frac{\alpha}{2} \boxed{\lim_{x \to +\infty} \frac{x^{\alpha}}{\ln x}}$$

H → da prima

$+\infty$

x^{α} infinito $>$ $\ln^2 x$

Analogamente:

x^{α} , $\ln^3 x$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x^{\alpha}}{\ln^3 x} \overset{H}{=} \lim_{x \to +\infty} \frac{\alpha \cdot x^{\alpha - 1}}{3 \ln^2 x \cdot \frac{1}{x}} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\alpha x^{\alpha}}{3 \ln^2 x}$$

In generale:

$\forall m \in \mathbb{N}$

x^{α} è un infinito $>$ $\ln^m x$

Ad esempio:

$\sqrt[100]{x}$ è un infinito $> (\ln x)^{1000}$

D

$$e^x \xrightarrow[x \to +\infty]{} +\infty \qquad (a^x,\ a > 1)$$

$$x \xrightarrow[x \to +\infty]{} +\infty \qquad (m \in \mathbb{N})$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x}{e^x} \overset{H}{=} \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{e^x} = 0$$

e^x infinito $>$ x

E

$$e^x \longrightarrow +\infty$$

$$x^2 \longrightarrow +\infty$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x^2}{e^x} \overset{H}{=} \lim_{x \to +\infty} \frac{2x}{e^x} = 2 \overset{0}{\overset{\shortparallel}{\boxed{\lim_{x \to +\infty} \frac{x}{e^x}}}}$$

(F)

$$e^x$$

$$x^3 \longrightarrow +\infty$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x^3}{e^x} \overset{H}{=} \lim_{x \to +\infty} 3 \cdot \frac{x^2}{e^x} = 0$$

(G)

$$e^x$$

$$x^m \longrightarrow +\infty \qquad (m \in \mathbb{N})$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x^m}{e^x} \overset{H}{=} \lim_{x \to +\infty} \frac{m \cdot x^{m-1}}{e^x} \overset{H}{=}$$

$$\overset{H}{=} \lim_{x \to +\infty} \frac{m \cdot (m-1) \cdot x^{m-2}}{e^x} \overset{H}{=} \dots$$

$$\dots \overset{H}{=} \lim_{x \to +\infty} \frac{m!}{e^x} = 0$$

e^x cresce più velocemente

di x^m $\forall m \in \mathbb{N}$

$$e^x >> x^{10^{10^{10^{10}}}}$$

$$\left[e^x >> \sum_{j=0}^{n} a_j x^j \right]$$

(H)

$$a^x \xrightarrow[x \to +\infty]{} +\infty \qquad (a > 1)$$

$$x^x \xrightarrow[x \to +\infty]{} +\infty$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x^x}{a^x} = \lim_{x \to +\infty} \left(\frac{x}{a}\right)^x$$

se $\quad x > 2a \implies \dfrac{x}{a} \geq 2$

$$\implies \left(\frac{x}{a}\right)^x \geq 2^x \xrightarrow[x \to +\infty]{} +\infty$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x^x}{a^x} = +\infty$$

Quindi, ad esempio:

$$x^x >> (1000000000)^x$$

In conclusione, la gerarchia per $x \longrightarrow +\infty$

dal più lento al più veloce

$\ln^m x \quad (m \in \mathbb{N})$

$x^\alpha \quad (\alpha \in \mathbb{R} : \alpha > 0)$

a^x

x^x

I

$$\lim_{x \to 0^+} x^x = ?$$

$$x^x = e^{\ln(x^x)} = e^{x \ln x}$$

$$\lim_{x \to 0^+} \underbrace{x}_{\to 0^+} \cdot \underbrace{\ln x}_{\to -\infty} =$$

$$= \lim_{x \to 0^+} \frac{\overbrace{\ln x}^{\to -\infty}}{\underbrace{\frac{1}{x}}_{\to +\infty}} \overset{H}{=}$$

$$\overset{H}{=} \lim_{x \to 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \to 0^+} -x = 0$$

$$\Longrightarrow \lim_{x \to 0^+} x^x = \lim_{x \to 0^+} e^{x \ln x} = e^0 = 1$$

$$x \cdot \ln x$$

$$[0 \cdot (-\infty)]$$

$$\frac{\ln x}{\left(\frac{1}{x}\right)} = \ln x \cdot \frac{1}{\left(\frac{1}{x}\right)} =$$

$$= (\ln x) \cdot x$$

Oss.:

$$\lim_{x \to 0^+} x \cdot \ln x = \lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} \;\ldots\ldots$$

Se invece si scrive:

$$\lim_{x \to 0^+} x \cdot \ln x = \lim_{x \to 0^+} \frac{\overbrace{x}^{\to 0}}{\underbrace{\frac{1}{\ln x}}_{\to 0}}$$

$$\overset{H}{=} \lim_{x \to 0^+} \frac{1}{-\frac{1}{\ln^2 x} \cdot \frac{1}{x}} =$$

$$= \lim_{x \to 0^+} -x \cdot \ln^2 x = ?$$

II

$$\lim_{x\to 0+} \boxed{x^{\sin x}} = \lim_{x\to 0+} e^{\sin x \cdot \ln x} = 1$$

$$x^{\sin x} = e^{\ln x^{\sin x}} = e^{\sin x \cdot \ln x}$$

$$\lim_{x\to 0+} \underbrace{\boxed{\sin x}}_{0^+} \cdot \underbrace{\boxed{\ln x}}_{-\infty} = \lim_{x\to 0+} \frac{\overset{-\infty}{\ln x}}{\underbrace{\frac{1}{\sin x}}_{+\infty}} =$$

$$\overset{H}{=} \lim_{x\to 0+} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{\cos x}{\sin^2 x}} = \lim_{x\to 0+} -\frac{\sin^2 x}{x\cdot \cos x} =$$

$$= -\lim_{x\to 0+} \underbrace{x}_{0} \cdot \underbrace{\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2}_{1} \cdot \underbrace{\frac{1}{\cos x}}_{1} = 0$$

ESERCIZI:

(1) $$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1 - x - \frac{x^2}{2}}{x^3} = \frac{1}{6}$$

(2) $$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x} - 1 - \frac{1}{2}x}{x^2} = -\frac{1}{8}$$

(3) $$\lim_{x\to 0} \left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x\sin x}\right) = -\frac{1}{6}$$

(4) $$\lim_{x\to +\infty} \frac{x^{\ln x}}{(\ln x)^x} \qquad (++)$$

Solut. [illegible] 4:

$$\frac{x^{\ln x}}{(\ln x)^x} = \frac{e^{\ln\left(x^{\ln x}\right)}}{e^{\ln (\ln x)^x}} =$$

$$= \frac{e^{(\ln x)^2}}{e^{x \ln (\ln x)}} =$$

$$= \frac{1}{e^{x \ln (\ln x) - (\ln x)^2}} =$$

$$= \frac{1}{e^{x\left(\ln(\ln x) - \boxed{\frac{(\ln x)^2}{x}}\right)}} \xrightarrow[x \to +\infty]{} 0$$

$+\infty \qquad +\infty \qquad 0$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{(\ln x)^2}{x} \overset{H}{=} \lim_{x \to +\infty} \frac{2 \cdot \ln x \cdot \frac{1}{x}}{1} \overset{H}{=}$$

$$= 2 \lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} \overset{H}{=}$$

$$\overset{H}{=} 2 \lim_{x \to +\infty} \frac{\frac{1}{x}}{1} = 0$$

5

$$\lim_{x \to 0} \frac{\tan x - \sin x}{x^3 + x^2 + \ln(1 - x^2)} = \frac{1}{2}$$

6

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x + \cos x - e^x}{\ln(1+x) - x} = 2$$

INTRODUZIONE ALLO SVILUPPO IN SERIE DI TAYLOR DI UNA FUNZIONE:

DEF.:

$$f : A \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$x_0 \in D(A)$$

$f(x)$ si dice INFINITESIMO per $x \longrightarrow x_0$ se:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = 0$$

Es.:

① x^3, $x^5 - x^2$, $\sin x^3$, $\operatorname{tg}^2 x$

sono infinitesimi per $x \to 0$

② $x^5 - x^2$ è un infinitesimo

anche per $x \to 1$, mentre

x^3, $\sin x^3$, $\operatorname{tg}^2 x$ NO.

CONFRONTO DI INFINITESIMI:

Date due funzioni:

$$f(x) \xrightarrow[x \to x_0]{} 0$$

$$g(x) \xrightarrow[x \to x_0]{} 0$$

(f, g si dicono INFINITESIMI per $x \to x_0$)

se esiste:

$$\lim_{x \to x_0} \left| \frac{f(x)}{g(x)} \right| = L \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$$

allora si hanno i casi:

$L = 0 \longrightarrow f(x)$ è un infinitesimo di ordine superiore a $g(x)$

$0 < L \in \mathbb{R} \longrightarrow f(x)$ e $g(x)$ sono infinitesimi equivalenti

$L = +\infty$ o $-\infty$ $\longrightarrow$ $g(x)$ è un infinitesimo di ordine superiore a f

<u>Esempi</u>:

(1) $x^2 \xrightarrow[x \to 0]{} 0$

$x^4 - x^3 \xrightarrow[x \to 0]{} 0$

$$\lim_{x \to 0} \boxed{\left| \frac{x^4 - x^3}{x^2} \right|} = 0$$

$$\shortparallel$$

$$|x^2 - x|$$

$x^4 - x^3$ è un infinitesimo di ordine superiore

x	x^2	$x^3 - x^4$
0,1	0,01	0,0009
0,01	0,0001	0,00000099
0,001	10^{-6}	$9,99 \cdot 10^{-10}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

(2)

$$x^3 \xrightarrow[x \to 0]{} 0$$

$$x^6 \xrightarrow[x \to 0]{} 0$$

$$\lim_{x \to 0} \left| \frac{x^6}{x^3} \right| = \lim_{x \to 0} x^3 = 0$$

x^6 è un infinitesimo di ordine maggiore di x^3

(3)

$$x^n \xrightarrow[x \to 0]{} 0$$

$n > m$

$$x^m \xrightarrow[x \to 0]{} 0$$

$$\lim_{x \to 0} \left| \frac{x^n}{x^m} \right| = \lim_{x \to 0} |x|^{n-m} = 0$$

(se $n > m$)

x^n infinitesimo di ordine superiore di x^m

4

$$\sin^3 x \xrightarrow[x \to 0]{} 0$$

$$3x^3 \xrightarrow[x \to 0]{} 0$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin^3 x}{3x^3} = \lim_{x \to 0} \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{\sin x}{x}\right)^3 = \frac{1}{3}$$

$\sin^3 x$ e $3x^3$ sono infinitesimi equivalenti

DEF.: (o piccolo di una funzione):

$f, g : A \longrightarrow \mathbb{R}$, $x_0 \in D(A)$

$f(x) \neq 0$ su $A \setminus \{x_0\}$

$g(x) \xrightarrow[x \to x_0]{} 0$

si dice che g è un o-piccolo di f per $x \to x_0$ se:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{g(x)}{f(x)} = 0$$

In tal caso si scrive:

$$g(x) = o(f(x)) \quad \underbrace{\text{per } x \to x_0}$$

si può omettere se è chiaro dal contesto!

Esempio:

$x_0 = 0$

x^2 è un o-piccolo di $\sin x$ per $x \longrightarrow 0$

Infatti:

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^2}{\sin x} = \lim_{x\to 0} \underbrace{x}_{\downarrow\, 0} \cdot \underbrace{\frac{x}{\sin x}}_{\downarrow\, 1} = 0$$

$$\Longrightarrow \quad x^2 = o(\sin x)$$

Ma $x^2 \neq o(\sin^2 x)$, infatti

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^2}{\sin^2 x} = 1 \neq 0$$

$$\| $$

$$\lim_{x\to 0} \left(\frac{x}{\sin x}\right)^2 = \lim_{x\to 0} \frac{1}{\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2} = 1$$

• x^5 è un o-piccolo di x^3

Infatti:

$$\lim_{x \to 0} \frac{x^5}{x^3} = \lim_{x \to 0} x^2 = 0$$

$$\Longrightarrow \quad x^5 = o(x^3) \quad \text{per } x \to 0$$

• x^5 è un o-piccolo di x^4

$$\lim_{x \to 0} \frac{x^5}{x^4} = \lim_{x \to 0} x = 0$$

$$\Longrightarrow \quad x^5 = o(x^4) \quad \text{per } x \to 0$$

• In generale x^5 è un o-piccolo di x, x^2, x^3, x^4 per $x \to 0$

$x^5 = o(x)$, $x^5 = o(x^2)$, $x^5 = o(x^3)$

$x^5 = o(x^4)$ $\quad$ [$x^5 \neq o(x^5)$, $o(x^6)$ ...]

- x^n è un o-piccolo (per $x \to 0$) di x^m se $m < n$:

$$\lim_{x \to 0} \frac{x^n}{x^m} = \lim_{x \to 0} x^{n-m} = 0$$

$$\Rightarrow \quad x^n = o(x^m) \quad \forall m \in \mathbb{N} : m < n$$

- Dire che $f(x) = o(1)$ per $x \to x_0$ significa che:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{1} = 0$$

$$\shortparallel$$

$$\lim_{x \to x_0} f(x)$$

cioè: $f(x) = o(1)$ significa che $f(x) \longrightarrow 0$ per $x \to x_0$.

• $(x^6 - x^4)^2$ è un o-piccolo di x^6 se $x \to 0$

$$\lim_{x\to 0} \frac{(x^6-x^4)^2}{x^6} = \lim_{x\to 0} \frac{x^8(x^2-1)^2}{x^6} =$$

$$= \lim_{x\to 0} x^2(x^2-1)^2 = 0$$

$(x^6-x^4)^2 = o(x^6)$, $(x^6-x^4)^2 = o(x^7)$

$(x^6-x^4)^2 \neq o(x^8)$

• $(x^6 - x^4)^2$ è un o-piccolo di $x-1$ se $x \to 1$

$$\lim_{x\to 1} \frac{(x^6-x^4)^2}{x-1} = \lim_{x\to 1} \frac{x^8(x^2-1)^2}{(x-1)} =$$

$$= \lim_{x\to 1} x^4(x+1)^2(x-1) = 0$$

$(x^6-x^4)^2 = o(x-1)$ per $x \to 1$