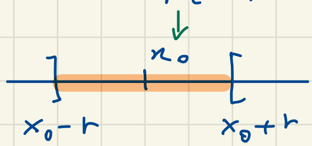
11. Novembre. 2021

DEF. (punto di massimo / minimo relativo)

$$f : A \longrightarrow \mathbb{R}$$

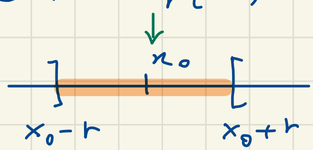
- $x_0 \in A$ si dice punto di massimo relativo (o locale) se:

$$\exists\, r > 0 : \quad f(x) \le f(x_0) \quad \forall x \in A \cap I_r(x_0)$$



- $x_0 \in A$ si dice punto di minimo relativo (o locale) se:

$$\exists\, r > 0 : \quad f(x) \ge f(x_0) \,, \quad \forall x \in A \cap I_r(x_0)$$



- $x_0 \in A$ si dice punto di massimo assoluto se:

$$f(x) \leq f(x_0), \quad \forall x \in A$$

- $x_0 \in A$ si dice punto di minimo assoluto se:

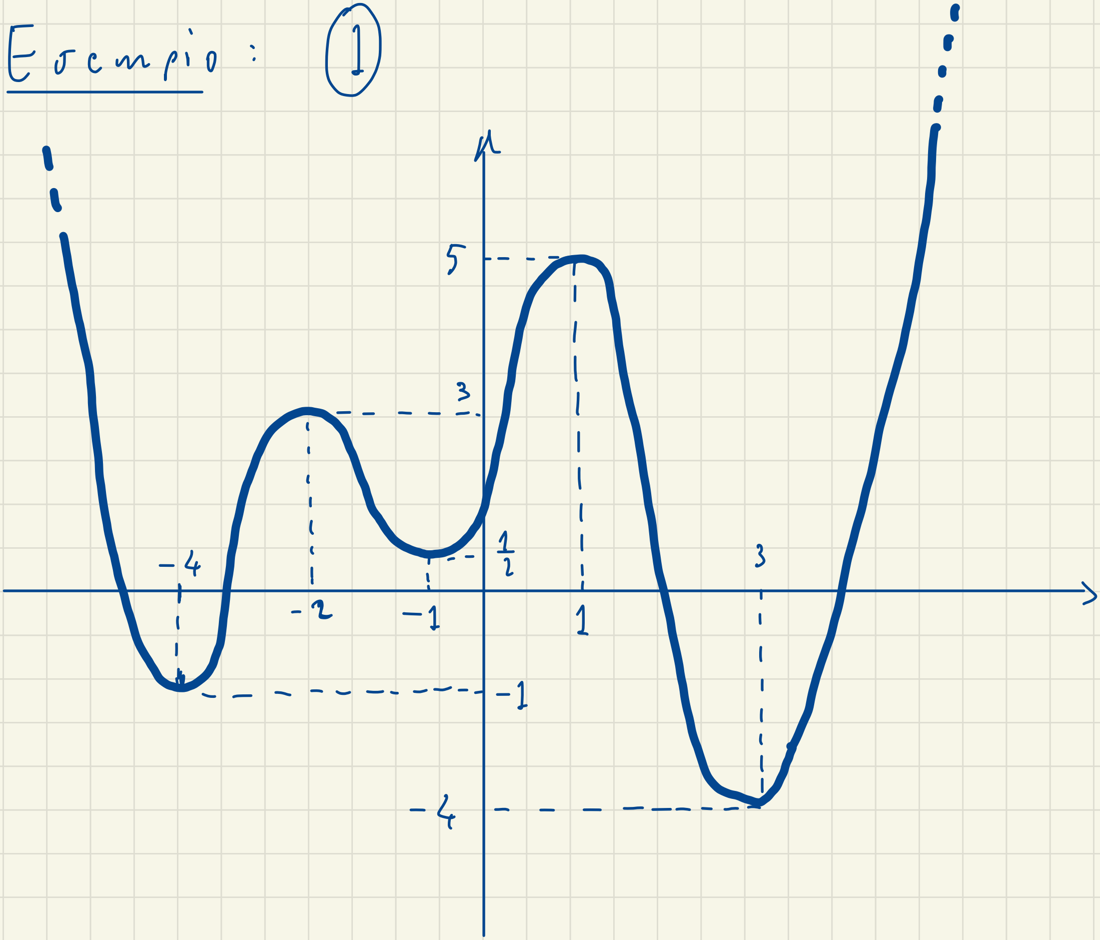
$$f(x) \geq f(x_0), \quad \forall x \in A$$

(<u>Ovviamente</u>:

se x_0 p. di max assoluto $\Rightarrow$ x_0 è anche p. di max relativo

se x_1 p. di min. assoluto $\Rightarrow$ x_1 è anche p. di min relativo)

Esempio: 1



$\overline{x}_1 = -4$ p. di minimo relativo

$\overline{x}_2 = -2$ p. di massimo relativo

$\overline{x}_3 = -1$ p. di minimo relativo

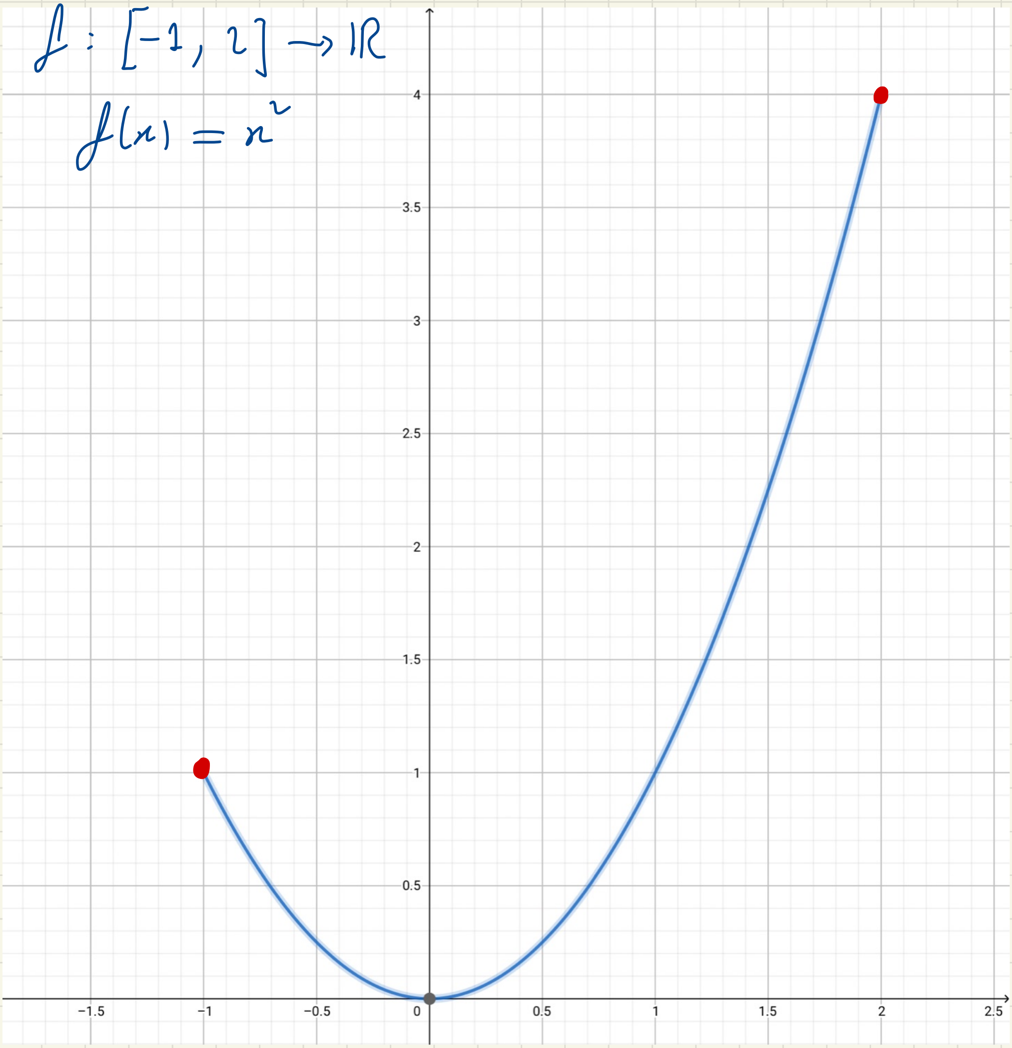
$\overline{x}_4 = 1$ p. di massimo relativo

$\overline{x}_5 = 3$ p. di minimo relativo

(in realtà, assoluto)

(2) $f : [-1, 2] \to \mathbb{R}$

$f(x) = x^2$



$\bar{x}_1 = -1$ p. di massimo relativo

$\bar{x}_2 = 0$ p. di minimo relativo (e assoluto)

$\bar{x}_3 = 2$ p. di massimo relativo (e assoluto)

TEOREMA (di Fermat):

$f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$

1. $x_0 \in]a, b[$ punto di massimo o di minimo relativo

2. f è derivabile in x_0

Allora:

$$f'(x_0) = 0$$

DIM.:

Supponiamo che x_0 p. di MAX relativo (l'altro caso è lasciato come esercizio)

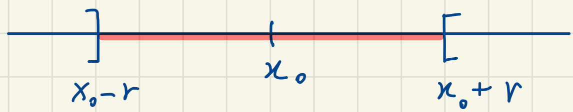
x_0 p. di max relativo:

$\exists\, r > 0$:

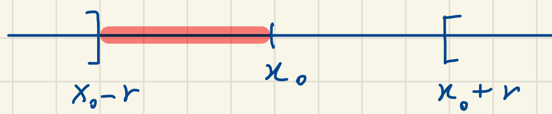
$$f(x) \leq f(x_0) \qquad \forall x \in I_r(x_0)$$

(cioè:

$x_0 - r < x < x_0 + r$)



(A) $x_0 - r < x < x_0$:



$$\frac{\overbrace{f(x) - f(x_0)}^{\leq 0}}{\underbrace{x - x_0}_{< 0}} \geq 0 \qquad \forall x : \; x_0 - r < x < x_0$$

f è derivabile in x_0 :

$$\exists \lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'_-(x_0) \geq 0$$

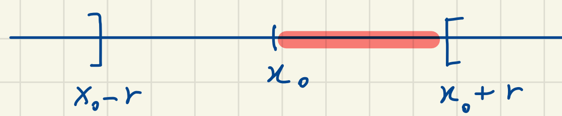
dal teorema di permanenza del segno!

(Infatti, se fosse $f'_-(x_0) < 0$, dal teorema della permanenza del segno, esisterebbe $\delta > 0$:

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} < 0 \qquad \forall x: \ x_0-\delta < x < x_0$$

che è una contraddizione!!)

B $\quad x_0 < x < x_0 + r$:



$$\frac{\overset{\leq 0}{\boxed{f(x)-f(x_0)}}}{\underset{>0}{x-x_0}} \leq 0 \qquad \forall x: \ x_0 < x < x_0+r$$

f è derivabile in x_0:

$$\exists \lim_{x\to x_0^+} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = f'_+(x_0) \leq 0$$

$\downarrow$

dal teorema di permanenza del segno!

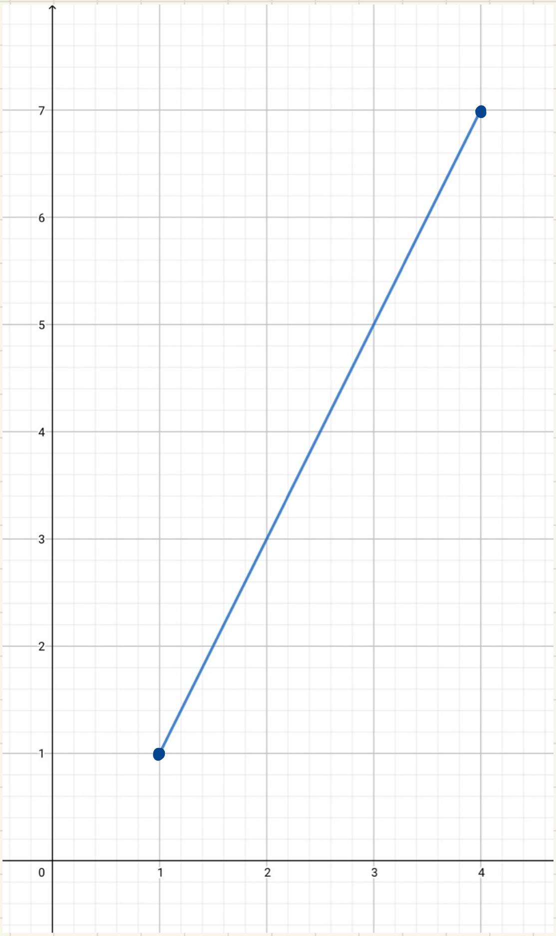
Siccome f è derivabile in x_0:

$$f'(x_0) = \begin{cases} f'_-(x_0) \geq 0 \longrightarrow f'(x_0) \geq 0 \\ f'_+(x_0) \leq 0 \longrightarrow f'(x_0) \leq 0 \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \quad f'(x_0) = 0$$

c.v.d.

Oss.: 1 Nel teorema di Fermat è essenziale che il punto x_0 sia interno all'intervallo $[a,b]$.



$$f : [1,4] \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$f(x) = 2x - 1$$

f è derivabile

$x_1 = 1$ p. di minimo relativo

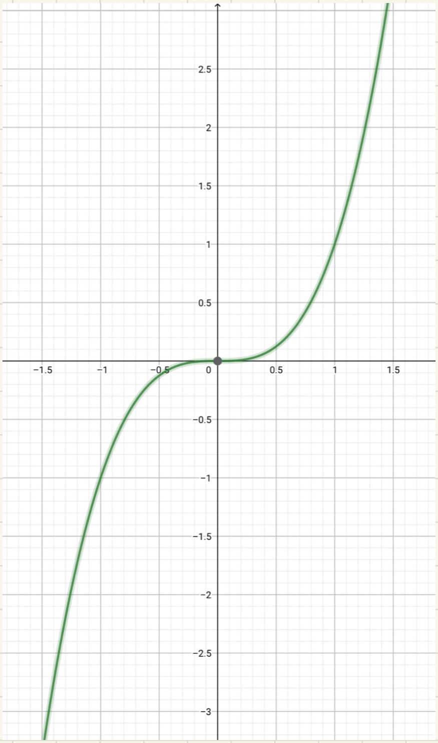
$x_2 = 4$ p. di massimo relativo

$$f'(x) = 2$$

$$f'(1) = 2 \neq 0 \qquad f'(4) = 2 \neq 0$$

OSS. 2 :

Nel caso di una funzione derivabile l'annullarsi della derivata prima in un punto $\bar{x}$ è condizione necessaria affinché $\bar{x}$ sia un punto di massimo o di minimo relativo, ma non è sufficiente in generale!



$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$f(x) = x^3$$

$$f'(x) = 3x^2 = 0 \iff x = 0$$

ma $x = 0$ NON è un punto di minimo o di max relativo.

Introduciamo ora tre teoremi molto importanti:

- il teorema di Rolle
- il teorema di Lagrange
- il teorema di Cauchy

che saranno assai utili nel seguito.

TEOREMA DI ROLLE:

$f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$

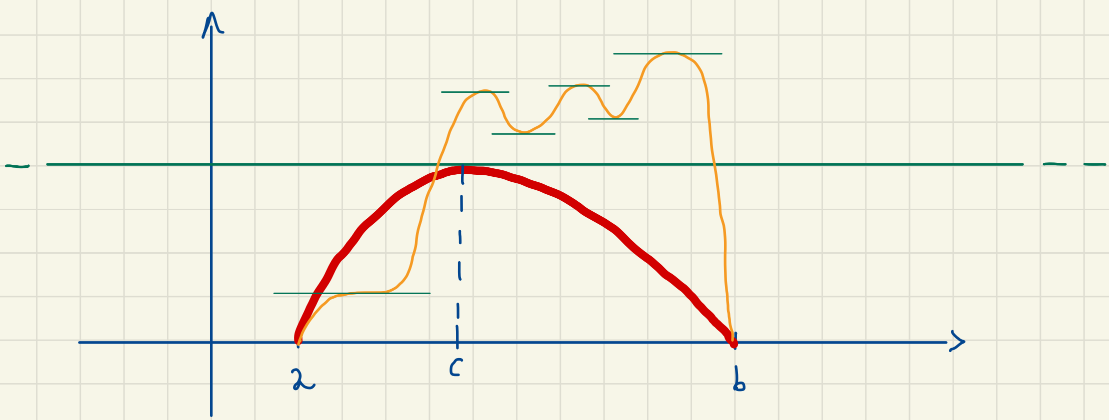
① f continua su $[a, b]$

② f derivabile in $]a, b[$

③ $f(a) = f(b)$

Allora:

$$\exists \; c \in \,]a, b[\; : \; f'(c) = 0$$



DIM.:

Dal teorema di Weierstrass, f assume il massimo e il minimo assoluti in $[a,b]$:

$\exists\ x_0, x_1 \in [a,b]$:

x_0 p. di max assoluto
$$f(x) \leq f(x_0) \quad \forall x \in [a,b]$$

x_1 p. di min. assoluto
$$f(x) \geq f(x_1) \quad \forall x \in [a,b]$$

Vi sono due casi:

A x_0, x_1 cadono entrambi sugli estremi a, b del dominio di f

cioè $\{x_0, x_1\} = \{a, b\}$

(o $x_0 = a$ e $x_1 = b$ oppure $x_0 = b$ e $x_1 = a$)

B $x_0 \in]a,b[$ oppure $x_1 \in]a,b[$

Partiamo dal caso A

Dunque: $\forall x \in [a,b]$:

$$f(x_1) \le f(x) \le f(x_0)$$

$$=$$

dall'ipotesi 3

$$f(a) = f(b)$$

Ne segue che f è costante su $[a,b]$

cioè: $\exists k \in \mathbb{R} : \quad f(x) = k \quad \forall x \in [a,b]$

$$\Longrightarrow \quad f'(x) = 0 \quad \forall x \in [a,b]$$

c.v.d. caso A

(B) Assumiamo per esempio che $x_0 \in]a,b[$ (analogamente si procede se $x_1 \in]a,b[$)

$\Rightarrow$ x_0 p. di max assoluto

$\Rightarrow$ x_0 p. di max relativo

dal teorema di Fermat:

$$f'(x_0) = 0 \longrightarrow c := x_0$$

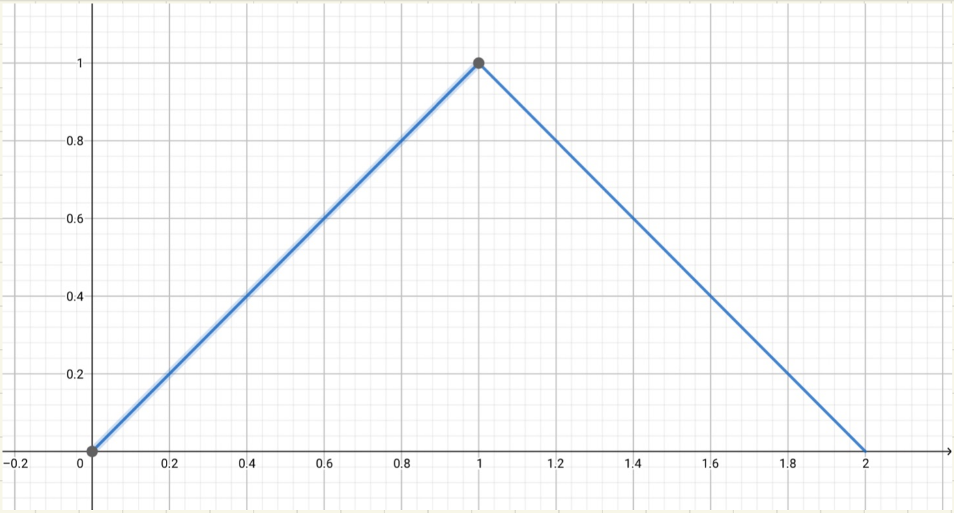
c.v.d. caso (B)

OSS.:

Attenzione! Nel teorema di Rolle è essenziale che f sia derivabile in $]a,b[$:

$$f: [0,2] \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{se } 0 \le x \le 1 \\ 2-x & \text{se } 1 < x \le 2 \end{cases}$$



$f'(x) \neq 0$ se $x \neq 1$, $f'_-(1) = 1$, $f'_+(1) = -1$

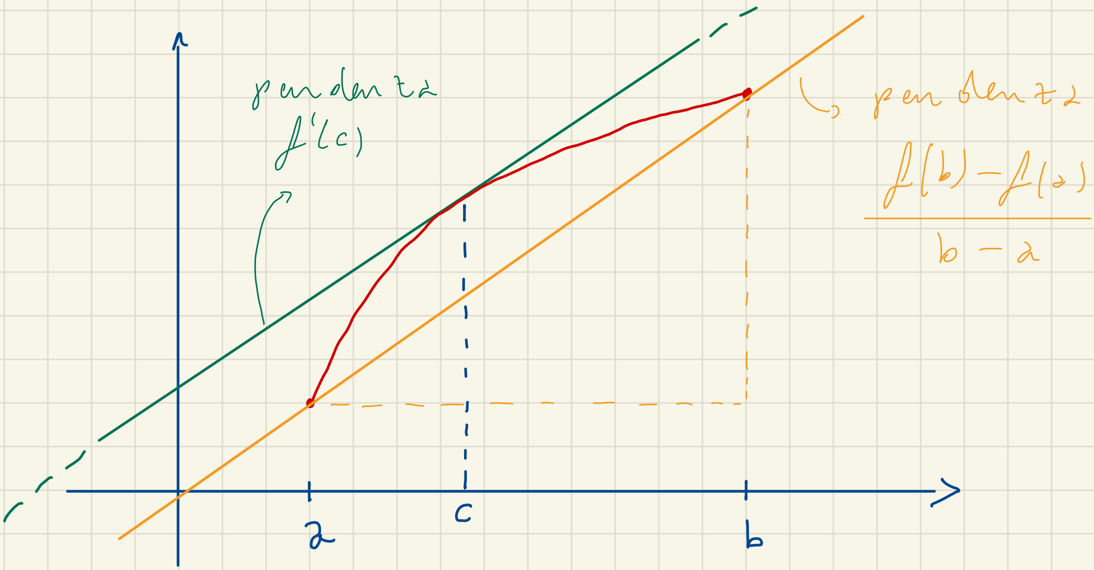
IL TEOREMA DI LAGRANGE :

$f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$

1. f continua su $[a, b]$
2. f derivabile su $]a, b[$

Allora :

$$\exists\, c \in \,]a, b[\; : \quad \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c)$$



DIM. :

Proveremo il teorema di Lagrange usando il teorema di Rolle.

Scegliamo una funzione ausiliaria:

$$\varphi : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R} \qquad (K \in \mathbb{R})$$

$$\varphi(x) = f(x) + K \cdot x$$

Vogliamo scegliere $K \in \mathbb{R}$ in modo che si possa applicare a φ il teorema di Rolle.

- φ è continua su $[a, b]$ da 1
- φ è derivabile su $]a, b[$ da 2

$$\varphi(a) = f(a) + K \cdot a$$
$$\varphi(b) = f(b) + K \cdot b$$

Scegliamo K in modo che:

$$\varphi(a) = \varphi(b)$$

$$f(a) + Ka = f(b) + Kb$$

$$\Longrightarrow \quad K(b-a) = f(a) - f(b)$$

$$\Longrightarrow \quad \boxed{K = \frac{f(a)-f(b)}{b-a}}$$

Dal teorema di Rolle per φ:

$\exists\, c \in \,]a,b[\,$:

$$\underset{\substack{\shortparallel \\ f'(c)+K}}{\varphi'(c)} = 0$$

$$\Longrightarrow \quad f'(c) = -K = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}.$$

c.v.d.

Oss.:

Se alle ipotesi 1, 2 del teor. di Lagrange, aggiungiamo

3 $f(a) = f(b)$

otteniamo il teor. di Rolle.

Dunque:

T. di Lagrange $\rightleftarrows$ T. di Rolle

Corollario:

$f :]a, b[\longrightarrow \mathbb{R}$

f derivabile t.c. $f'(x) = 0 \quad \forall x \in]a, b[$

Allora f è costante.

DIM.:

$\forall x_1, x_2 \in]a, b[: \quad x_1 < x_2$

Si può applicare il teorema di Lagrange a

$f : [x_1, x_2] \longrightarrow \mathbb{R}$

(f è continua su $[x_1, x_2]$ perché $[x_1, x_2] \subseteq]a, b[$ dove f è derivab.

$\Rightarrow f$ è continua su $[x_1, x_2]$)

$\exists\, c \in \,]x_1, x_2[\,:$

$$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} = f'(c) = 0$$

$$\Rightarrow \quad f(x_2) = f(x_1)$$

c. v. d.

Attenzione alle ipotesi del corollario !!

Esempio:

$$f(x) = \operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} \frac{1}{x}$$

$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2} + \frac{1}{1+\left(\frac{1}{x}\right)^2} \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right)$$

$$= \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{\left(1+\frac{1}{x^2}\right) \cdot x^2} =$$

$$= \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{x^2+1} = 0$$

Tuttavia:

$$f(-1) = \operatorname{arctg}(-1) + \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{-1}\right) =$$

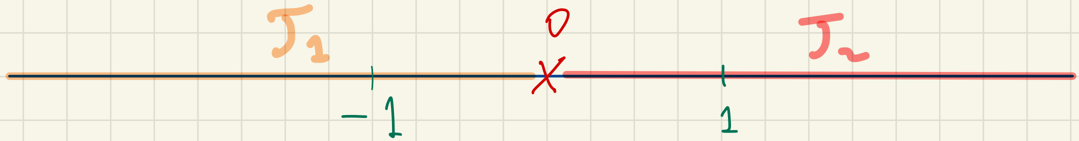
$$= 2 \operatorname{arctg}(-1) = 2 \cdot \left(-\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\pi}{2}$$

$$f(1) = \operatorname{arctg} 1 + \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{1}\right) = 2 \cdot \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} \quad \neq$$

In realtà non vi è contraddizione con il corollario.

Infatti:

$$D(f) = \mathbb{R} \setminus \{0\} = J_1 \cup J_2$$



Non è un intervallo!!

Il corollario garantisce che f è costante su J_1 ed è costante su J_2, ma (come effettivamente accade) non è detto che tali costanti siano uguali.

Quindi:

f è costante su $J_1 = \{x < 0\}$

$$f(x) = K_1 \quad \forall x \in \mathbb{R} : x < 0$$

$$K_1 = ?$$

È sufficiente calcolare f su un punto noto:

$$K_1 = f(-1) = -\frac{\pi}{2}$$

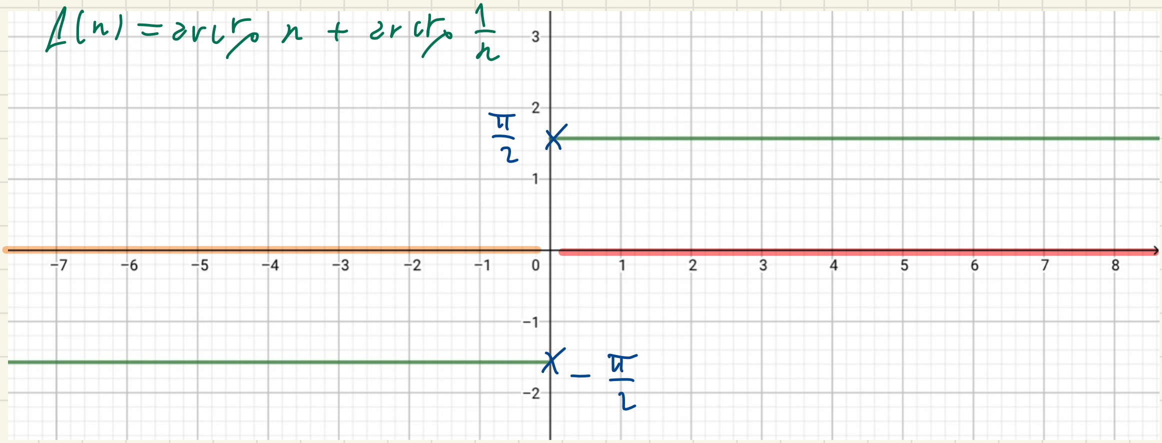
Analogamente:

$$f(x) = K_2 \quad \forall x \in \mathbb{R} : x > 0$$

$$K_2 = f(1) = \frac{\pi}{2}$$

$$\operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} \frac{1}{x} = -\frac{\pi}{2} \quad (x<0)$$

$$\operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} \frac{1}{x} = \frac{\pi}{2} \quad (x>0)$$



Esercizio:

Dimostrare che:

$$\arcsin \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} = \operatorname{arctg} x \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

(Considerare la funzione:

$$f(x) = \arcsin \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} - \operatorname{arctg} x \quad)$$

$$D(f) = \mathbb{R}$$

$$D\left[\arcsin \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} - \operatorname{arctg} x\right] =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right)^2}} \cdot \frac{\sqrt{1+x^2} - \frac{1}{\cancel{2}\sqrt{1+x^2}} \cdot \cancel{2}x \cdot x}{\left(\sqrt{1+x^2}\right)^2} -$$

$$- \frac{1}{1+x^2}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right)^2}} \cdot \frac{\sqrt{1+x^2} - \frac{1}{\cancel{2}\sqrt{1+x^2}} \cdot \cancel{2}x \cdot x}{\left(\sqrt{1+x^2}\right)^2} - \frac{1}{1+x^2}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1-\frac{x^2}{1+x^2}}} \cdot \frac{\sqrt{1+x^2} - \frac{x^2}{\sqrt{1+x^2}}}{(1+x^2)} - \frac{1}{1+x^2} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\frac{1+\cancel{x^2}-\cancel{x^2}}{1+x^2}}} \cdot \frac{\frac{1+\cancel{x^2}-\cancel{x^2}}{\sqrt{1+x^2}}}{(1+x^2)} - \frac{1}{1+x^2} =$$

$$= \frac{1}{\frac{1}{\cancel{\sqrt{1+x^2}}}} \cdot \frac{1}{\cancel{\sqrt{1+x^2}} \cdot (1+x^2)} - \frac{1}{1+x^2} = 0$$

$$D\left[\arcsin \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} - \arctan x\right] = 0 \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

è un intervallo

$$\arcsin \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} - \arctan x = K \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

$x = 0$

$$0 - 0 = K \implies K = 0$$

$\implies$

$$\arcsin \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} - \arctan x = 0 \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

$\implies$

$$\arcsin \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} = \arctan x \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

IL TEOREMA DI CAUCHY:

$f, g : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$

1. f, g continue su $[a, b]$
2. f, g derivabili su $]a, b[$
3. $g'(x) \neq 0 \quad \forall x \in]a, b[$

Allora:

$\exists \, c \in]a, b[:$

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

Oss.:

$f, g : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$

① f, g continue su $[a,b]$

② f, g derivabili su $]a,b[$

③ $g'(x) \neq 0 \quad \forall x \in]a,b[$

Allora:

$\exists\, c \in]a,b[$:

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

Hyp. ③ garantisce $g'(c) \neq 0$

Inoltre: da ① + ② + ③ $\Longrightarrow g(b)-g(a) \neq 0$

(se fosse $g(b)-g(a) = 0 \Longrightarrow g(a) = g(b)$

① + ② dal teorema di Rolle: $\exists\, d \in]a,b[$

$g'(d) = 0$ è in contradd. con ③)

ATTENZIONE:

Il teorema di Cauchy non si ottiene applicando il T. di Lagrange, separatamente, al numeratore e al denominatore!

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

$$\parallel$$

$\exists\, c_1 \in]a,b[\;\rightarrow$ dal T. di Lagrange

$$\frac{\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}}{\dfrac{g(b)-g(a)}{b-a}} \qquad \frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(c_1) \qquad \frac{g(b)-g(a)}{b-a} = g'(c_2)$$

$\exists\, c_2 \in]a,b[$

$$= \frac{f'(c_1)}{g'(c_2)}$$

<u>DIM.</u>: (teorema di Cauchy)

Consideriamo la funzione:

$$h : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R} \qquad (K \in \mathbb{R})$$

$$h(x) = f(x) + K \cdot g(x)$$

$\Longrightarrow$ h è continua in $[a, b]$

h è derivabile su $]a, b[$

Per applicare il teorema di Rolle ad h dobbiamo scegliere $K \in \mathbb{R}$ in modo che:

$$\left.\begin{aligned} h(a) &= f(a) + K\, g(a) \\ h(b) &= f(b) + K\, g(b) \end{aligned}\right] =$$

$$f(a) + K\varphi(a) = f(b) + K\varphi(b)$$

$$f(b) - f(a) = K\left(\varphi(a) - \varphi(b)\right)$$

$$\Rightarrow \quad K = \frac{f(b) - f(a)}{\varphi(a) - \varphi(b)}$$

Applichiamo il t. di Rolle a h:

$$\exists\, c \in\,]a,b[\; : \quad h'(c) = 0$$

$$\begin{gathered} h'(c) \\ \parallel \\ f'(c) + K\cdot\varphi'(c) \end{gathered}$$

$$\Longrightarrow \quad f'(c) + K\cdot\varphi'(c) = 0$$

$$\Longrightarrow \quad f'(c) = -K\cdot\varphi'(c)$$

$$f'(c) = -k \cdot \varphi'(c)$$

$$\left[\text{③} \Longrightarrow \varphi'(c) \neq 0 \right]$$

$$\Longrightarrow \quad \frac{f'(c)}{\varphi'(c)} = -k =$$

$$= \frac{f(b) - f(a)}{\varphi(b) - \varphi(a)}$$

c. v. d.

OSS.:

Se nel teorema di Cauchy scegliamo $g(x) = x$ otteniamo il teorema di Lagrange.

Il quadro complessivo è il seguente:

$$
\begin{tikzcd}
\text{T. di Rolle} \arrow[d, bend right] \arrow[dd, bend right=60] \\
\text{T. di Lagrange} \arrow[u, bend right] \\
\text{T. di Cauchy} \arrow[u, bend right]
\end{tikzcd}
$$

Vediamo ora come il teorema di Lagrange permetta di correlare la monotonia di una funzione con il segno della sua derivata prima.

TEOREMA:

$f :]a,b[\longrightarrow \mathbb{R}$ derivabile

Allora:

(I) $f'(x) \geq 0 \quad \forall x \in]a,b[$
$(\leq)$

$$\Updownarrow$$

f è crescente su $]a,b[$
(decrescente)

(II) $f'(x) > 0 \quad \forall x \in]a,b[$

$$\Downarrow \quad \not\Uparrow$$

ad es.: $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
$f(x) = x^3$

f è strettamente crescente su $]a,b[$

III $f'(x) < 0 \quad \forall x \in]a,b[$

$$\Downarrow \quad \not\Uparrow \longrightarrow \text{Ad es.: } f(x) = -x^3$$

f è strettamente decrescente su $]a,b[$

DIM.:

I $\Downarrow$ Si deve provare che

$\forall x_1, x_2 \in]a,b[$:

$$x_1 < x_2 \overset{(?)}{\Longrightarrow} f(x_1) \leq f(x_2)$$

Applichiamo il teorema di Lagrange

a

$$f : [x_1, x_2] \longrightarrow \mathbb{R}$$

(oss.: $[x_1, x_2] \subseteq]a,b[$)

$\exists\, c \in \,]a,b[\,:$

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{\underbrace{x_2 - x_1}_{>0}} = f'(c) \geq 0$$

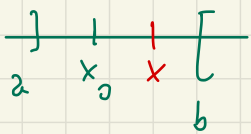
$$\Longrightarrow \quad f(x_2) - f(x_1) \geq 0$$

$$\Longrightarrow \quad f(x_2) \geq f(x_1) \qquad \text{c.v.d.}$$

I $\Uparrow$ (Attenzione! l'uso diretto del T. di Lagrange **non** permette di concludere !!)

$\forall\, x_0 \in \,]a,b[\,:$ $\Big\{$ devo provare che $f'(x_0) \geq 0$

$$x > x_0 \quad \Longrightarrow \quad f(x) \geq f(x_0)$$



$$\Longrightarrow \quad f(x) - f(x_0) \geq 0$$

$\forall x \in]a,b[: x > x_0 : \quad (\longrightarrow x - x_0 > 0)$

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0$$

f è derivabile in x_0:

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0$$

(dal teorema di permanenza del segno)

II $\Downarrow$ Si deve provare che

$$\forall\, x_1, x_2 \in\,]a,b[\, :$$

$$x_1 < x_2 \overset{(?)}{\Longrightarrow} f(x_1) < f(x_2)$$

Applichiamo il teorema di Lagrange

a

$$f : [x_1, x_2] \longrightarrow \mathbb{R}$$

(oss.: $[x_1, x_2] \subseteq\,]a,b[$)

$$\exists\, c \in\,]x_1, x_2[\, :$$

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{\underbrace{x_2 - x_1}_{>0}} = f'(c) > 0$$

$$\Longrightarrow f(x_2) - f(x_1) > 0$$

$$\Longrightarrow f(x_2) > f(x_2) \qquad \text{c.v.d.}$$

(II) $\#$

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$f(x) = x^3$$

f è strettamente crescente

ma $f'(x) = 3x^2 \geq 0$ su $\mathbb{R}$

e <u>non</u> $f'(x) > 0$

III $\Downarrow$ si procede come per II

(lasciato come esercizio)

III $\not\Uparrow$

$$f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$f(x) = -x^3$$

f è strett. decrescente

$f'(x) = -3x^2 \leq 0$ ma non $f' < 0$.

PROP.:

$f :]a,b[\longrightarrow \mathbb{R}$ derivabile

Se:

① $f'(x) \geq 0$ (≤ 0) $\forall x \in]a,b[$

② posto $N = \{ x \in]a,b[\mid f'(x) = 0 \}$,

N è un insieme finito

allora:

f è strettamente crescente (decrescente)

(si ottiene un'equivalenza se $\mathring{N} = \emptyset$)

DEF. (punto interno ad un insieme)

$A \subseteq \mathbb{R}$

$x_0 \in A$

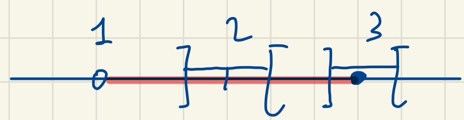
x_0 si dice punto interno di A

se: $\exists r > 0 : I_r(x_0) \subseteq A$

$$\Downarrow$$

$$\{ y \in \mathbb{R} \mid |y - x_0| < r \} =]x_0 - r, x_0 + r[$$

Es.: $A =]1, 3]$



2 è interno

3 non è interno

1 non è interno

4 non è interno

$\mathring{A} = \{ x \in A \mid x$ punto interno di $A \}$

<u>Esempio</u>:

$A =]1, 3]$

$\mathring{A} =]1, 3[\rightsquigarrow \mathring{A} \subsetneq A$

$B =]1, 3[$

$\mathring{B} =]1, 3[= B$

$C = [1, 2]$

$\mathring{C} =]1, 2[$

$\mathring{\mathbb{N}} = \emptyset$

DIM.:

1 $\Longrightarrow$ f è crescente

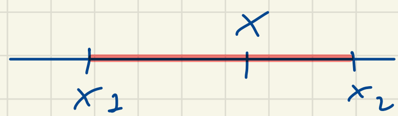
Se, per contraddizione, f non fosse strettamente crescente:

$\exists\, x_1, x_2 \in \,]a, b[\, :$

$$x_1 < x_2 \quad \text{e} \quad f(x_1) = f(x_2)$$

Siccome f è crescente:

$\forall x \in \,]x_1, x_2[\, :$



$$f(x_1) \le f(x) \le f(x_2)$$

$=$

$\Longrightarrow$ f è costante su $[x_1, x_2]$

$\Longrightarrow$ $f'(x) = 0 \ \forall x \in \,]x_1, x_2[$ in contraddiz. con 2 !

c.v.d.