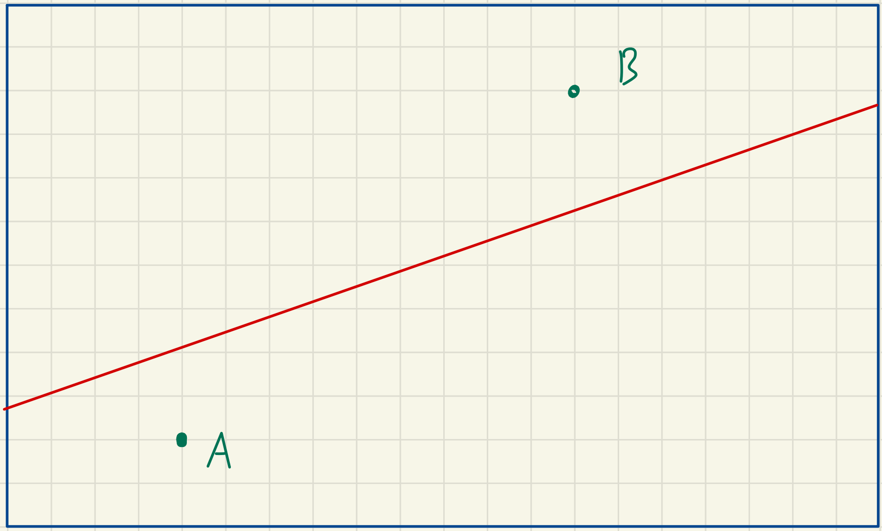
4. Novembre. 2021

Il teorema degli zeri risponde alla seguente questione "topologica":



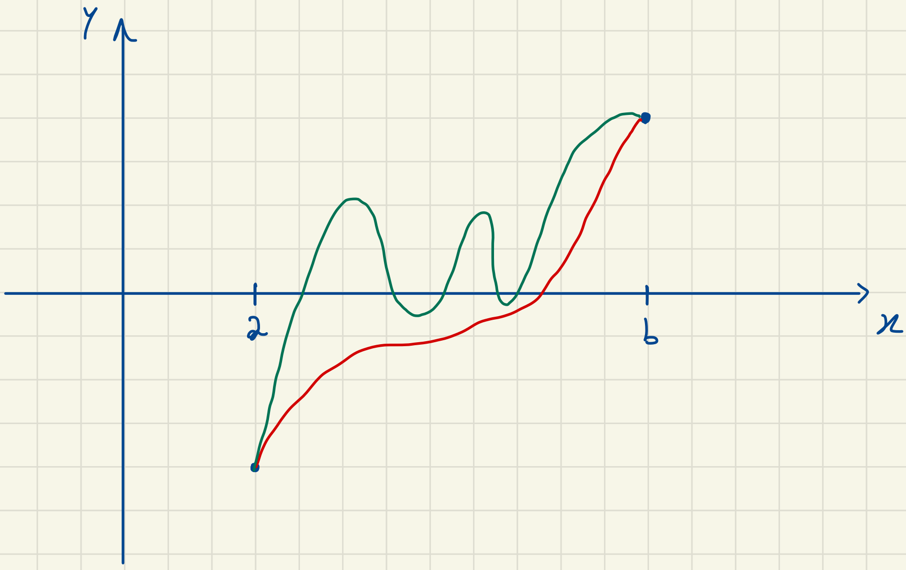
Una qualunque linea, interna al rettangolo, che congiunga i punti A e B deve tagliare la linea rossa in almeno un punto.

TEOREMA DEGLI ZERI (per le funzioni continue)

$f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ continua

$f(a) \cdot f(b) < 0$

$\Longrightarrow \quad \exists\, c \in \,]a, b[\, : \; f(c) = 0$



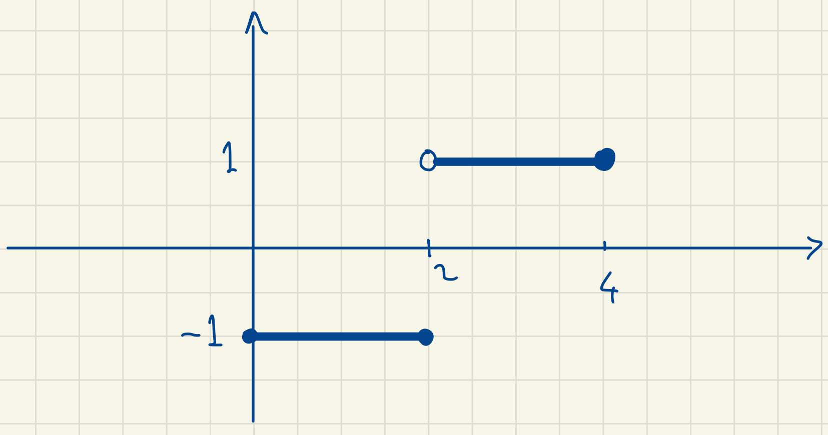
OSS.:

① la continuità di f è CRUCIALE

$$f(x) = \begin{cases} -1 & \text{se } 0 \leq x \leq 2 \\ 1 & \text{se } 2 < x \leq 4 \end{cases}$$

$f(0) = -1$ $\qquad$ $f(4) = 1$

$f(0) \cdot f(4) < 0$

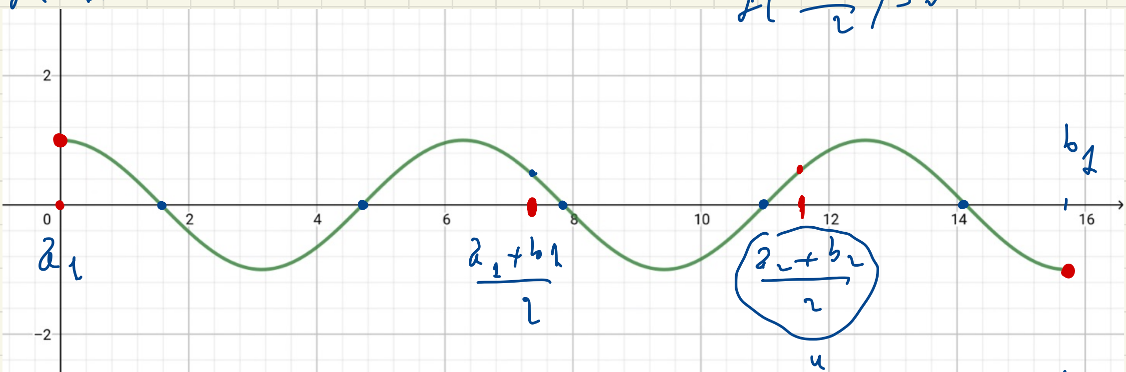


② Possono esistere più zeri:

$$f(x) = \cos x \quad \text{su} \quad [0, 5\pi]$$

$$f(0) = 1 \qquad f(5\pi) = -1$$

$f(a_1) > 0$ $\qquad$ $f\left(\frac{a_2+b_2}{2}\right) > 0$



a_3 $\qquad$ $f(b_1) < 0$

$$f\left(\frac{a_1+b_1}{2}\right) > 0$$

$$b_3 = b_2 = b_1$$

$$a_2 = \frac{a_1+b_1}{2}$$

$$b_2 = b_1$$

DIM. (Teorema degli zeri)

La dimostrazione è costruttiva.

Assumiamo che:

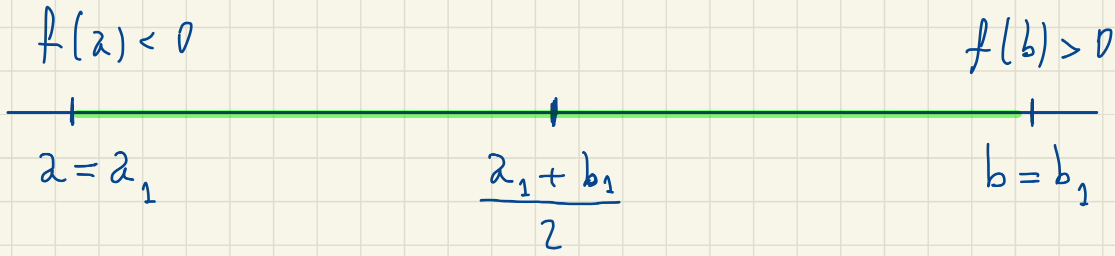
$$f(a) < 0 \qquad f(b) > 0$$

Seguiremo una procedura iterativa che ci porterà a costruire due successioni:

$$(a_n)_n \quad , \quad (b_n)_n$$

$$a_1 = a \qquad b_1 = b$$

$$\left(\text{in modo che } \begin{array}{l} f(a_n) < 0 \\ f(b_n) > 0 \end{array} \quad \forall n \right)$$



Tre casi:

I $\quad f\left(\frac{a_1+b_1}{2}\right) = 0 \longrightarrow$ Fine $\quad c = \frac{a_1+b_1}{2}$

II $\quad f\left(\frac{a_1+b_1}{2}\right) < 0 \longrightarrow \quad a_2 := \frac{a_1+b_1}{2}$

$$b_2 := b_1$$

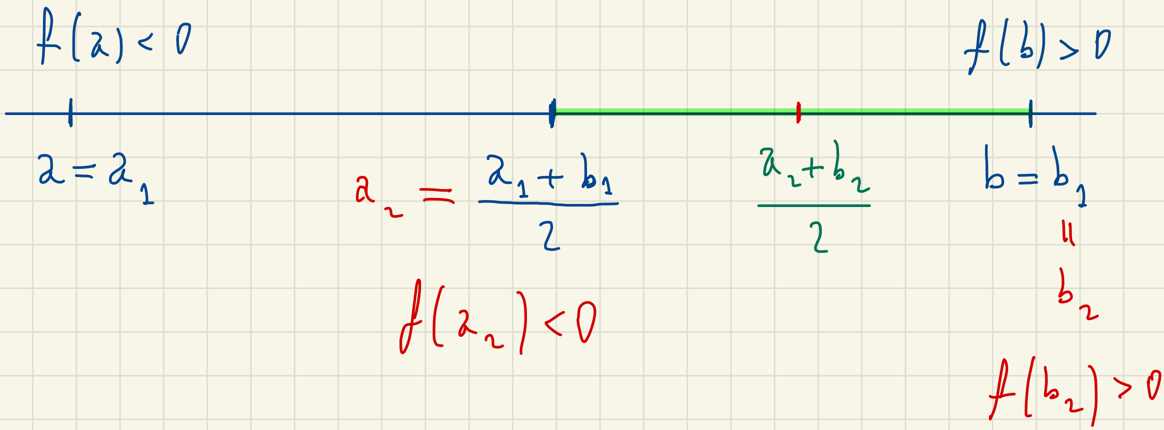
$$\longrightarrow \begin{cases} a_1 < a_2 \\ b_2 = b_1 \end{cases}$$

III $\quad f\left(\frac{a_1+b_1}{2}\right) > 0 \longrightarrow \quad a_2 := a_1$

$$b_2 := \frac{a_1+b_1}{2}$$

$$\longrightarrow \begin{cases} a_1 = a_2 \\ b_2 < b_1 \end{cases}$$

Per semplicità supponiamo di essere nel II caso:



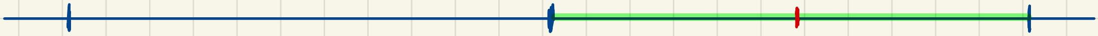
$$\Longrightarrow \quad a_1 < a_2$$

$$b_2 = b_1$$

Procediamo come prima.

Ci sono tre casi:

$f(a) < 0$ $\qquad\qquad$ $f(b) > 0$



$a = a_1$ $\qquad$ $a_2 = \dfrac{a_1 + b_1}{2}$ $\qquad$ $\dfrac{a_2 + b_2}{2}$ $\qquad$ $b = b_1 = b_2$

$f(a_2) < 0$ $\qquad$ $f(b_2) > 0$

I $\quad f\left(\dfrac{a_2 + b_2}{2}\right) = 0 \longrightarrow$ Fine $\quad c = \dfrac{a_2 + b_2}{2}$

II $\quad f\left(\dfrac{a_2 + b_2}{2}\right) < 0 \longrightarrow a_3 := \dfrac{a_2 + b_2}{2}$

$$b_3 := b_2$$

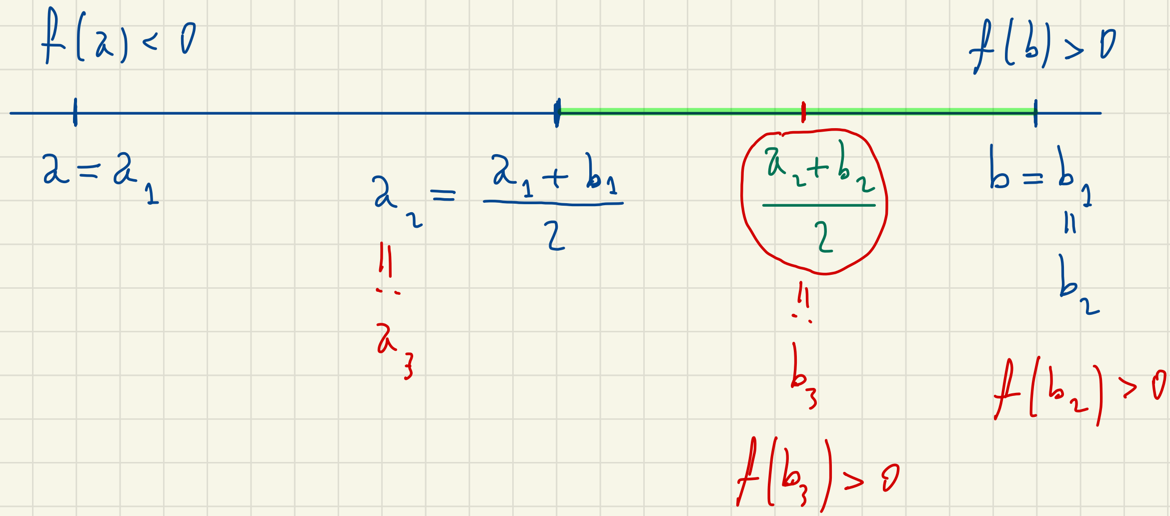
$$\longrightarrow \begin{cases} a_2 < a_3 \\ b_3 = b_2 \end{cases} \qquad \begin{pmatrix} f(a_3) < 0 \\ f(b_3) > 0 \end{pmatrix}$$

III $\quad f\left(\dfrac{a_2 + b_2}{2}\right) > 0 \longrightarrow a_3 := a_2$

$$b_3 := \frac{a_2 + b_2}{2}$$

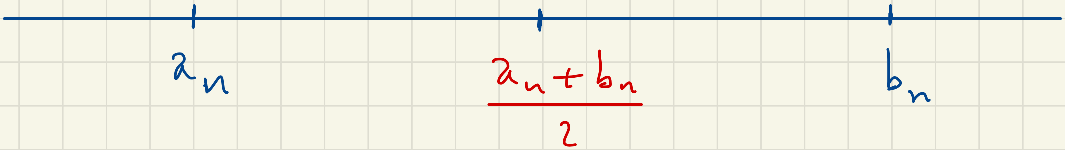
$$\longrightarrow \begin{cases} a_2 = a_3 \\ b_3 < b_2 \end{cases} \qquad \begin{pmatrix} f(b_3) > 0 \\ f(a_3) < 0 \end{pmatrix}$$

Supponiamo, ad esempio, di essere nel caso III.



$$\begin{cases} a_1 < a_2 \leq a_3 \\ b_3 < b_2 = b_1 \end{cases}$$

Si continua la procedura di bisezione del segmento.



I $f\left(\frac{a_n+b_n}{2}\right)=0 \longrightarrow$ Fine $c=\frac{a_n+b_n}{2}$

II $f\left(\frac{a_n+b_n}{2}\right)<0 \longrightarrow a_{n+1}=\frac{a_n+b_n}{2}$

$$b_{n+1}=b_n$$

$$\longrightarrow \begin{cases} a_n < a_{n+1} \\ b_{n+1}=b_n \end{cases} \qquad \left(\begin{array}{l} f(a_{n+1})<0 \\ f(b_{n+1})>0 \end{array}\right)$$

III $f\left(\frac{a_n+b_n}{2}\right)>0 \longrightarrow a_{n+1}=a_n$

$$b_{n+1}=\frac{a_n+b_n}{2}$$

$$\longrightarrow \begin{cases} a_{n+1}=a_n \\ b_{n+1}<b_n \end{cases} \qquad \left(\begin{array}{l} f(a_{n+1})<0 \\ f(b_{n+1})>0 \end{array}\right)$$

Se l'algoritmo termina, al passo $\bar{n} \in \mathbb{N}$ significa che:

$$f\left(\frac{a_{\bar{n}} + b_{\bar{n}}}{2}\right) = 0$$

$$c = \frac{a_{\bar{n}} + b_{\bar{n}}}{2}$$

Altrimenti, la procedura non termina: in questo caso avremo costruito 2 successioni:

$$(a_n)_n \quad , \quad (b_n)_n$$

contenute in $[a, b]$.

Scriviamo di seguito le proprietà di queste 2 successioni:

(1) $a_n \leq a_{n+1} \quad \forall n \in \mathbb{N}$

$b_{n+1} \leq b_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$

(2) $a_n \leq b_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$

(3) $f(a_n) < 0 \;, \quad f(b_n) > 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

(4) $$b_n - a_n = \frac{b_{n-1} - a_{n-1}}{2} \quad \forall n$$

$$b_n - a_n = \frac{b_{n-1} - a_{n-1}}{2} = \frac{b_{n-2} - a_{n-2}}{2^2} =$$

$$= \frac{b_{n-3} - a_{n-3}}{2^3} = \dots = \frac{b_1 - a_1}{2^{n-1}}$$

$$b_2 - a_2 = \frac{b_1 - a_1}{2}$$

$$b_3 - a_3 = \frac{b_2 - a_2}{2} = \frac{\frac{b_1 - a_1}{2}}{2} = $$

$$= \frac{b_1 - a_1}{2^2}$$

$$b_4 - a_4 = \frac{b_3 - a_3}{2} = \frac{\frac{b_1 - a_1}{2^2}}{2} = $$

$$= \frac{b_1 - a_1}{2^3}$$

$$\vdots$$

$$b_n - a_n = \frac{b_1 - a_1}{2^{n-1}}$$

Vogliamo dimostrare che:

$$\begin{cases} \lim_{n\to+\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty} b_n = c \\ \text{e} \quad f(c) = 0 \end{cases}$$

Proviamolo:

1 $\quad a_n \leq a_{n+1} \quad \forall n \in \mathbb{N}$

$\quad b_{n+1} \leq b_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$

$\Longrightarrow \quad (a_n)_n \subseteq [a, b] \longrightarrow$ è limitata

$a_n \nearrow \quad \forall n$

$\longrightarrow \quad \exists \lim_{n\to+\infty} a_n = \alpha \in \mathbb{R}$

$(b_n)_n \subseteq [a, b] \longrightarrow$ è limitata

$b_n \searrow \quad \forall n$

$$\longrightarrow \quad \exists \lim_{n \to +\infty} b_n = \beta \in \mathbb{R}$$

4

$$\underbrace{b_n - a_n}_{\substack{\Big\downarrow\, n \to +\infty \\ \beta - \alpha}} = \frac{b_1 - a_1}{2^{n-1}} = \frac{b - a}{2^{n-1}}$$

$$\frac{b - a}{2^{n-1}} \xrightarrow{n \to +\infty} 0$$

$$\beta - \alpha = 0 \implies \beta = \alpha$$

Si è provato che:

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty} b_n =: c$$

3 $f(a_n) < 0 \qquad \forall n \in \mathbb{N}$

$$\lim_{n\to+\infty} f(a_n) = f(c) \quad (\text{poiché } f \text{ è continua})$$

$\wedge$

0

(poiché $a_n \longrightarrow c$) dal lemma preliminare 2

lemma preliminare 1

$$\boxed{f(c) \leq 0}$$

(3)

$$f(b_n) > 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

$$\lim_{n \to +\infty} \underbrace{f(b_n)}_{\substack{\vee \\ 0}} = f(c) \quad \text{(poiché } f \text{ è continua)}$$

(poiché $b_n \longrightarrow c$)

dal lemma preliminare (2)

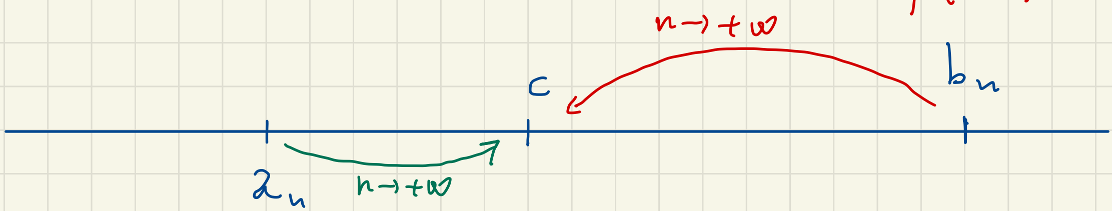
lemma preliminare (1)

$$\boxed{f(c) \geq 0}$$

$$\Longrightarrow \quad f(c) = 0$$

c.v.d.

$$f(b_n) > 0 \xrightarrow{n \to +\infty} f(c) \geq 0$$



$$f(a_n) < 0 \xrightarrow[n \to +\infty]{} f(c) \leq 0$$

Inoltre:

$$a_n \leq c \leq b_n \qquad \forall n$$

$$b_n - a_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$$

Quindi, a_n è un'approssimazione dal basso di c, mentre b_n è un'approssimazione dall'alto.

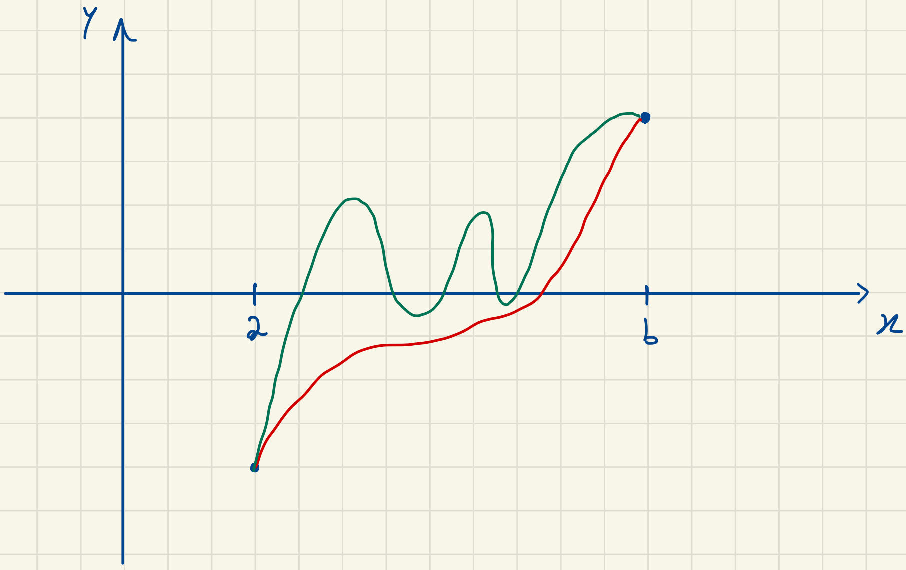
Oss.: La dimostrazione appena vista è "di tipo costruttivo" perché non si limita a mostrare l'esistenza di $c \in]a,b[: f(c) = 0$, ma fornisce un procedimento da cui dedurre un algoritmo di approssimazione della radice c di f.

TEOREMA DEGLI ZERI (per le funzioni continue)

$$f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R} \quad \text{continua}$$

$$f(a) \cdot f(b) < 0$$

$$\Longrightarrow \quad \exists \; c \in \;]a, b[\; : \; f(c) = 0$$



Applicazione del Teorema degli zeri ai polinomi:

Polinomio di grado dispari:

$$p(x) = \sum_{j=0}^{n} a_j x^j =$$

$$= a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n$$

$n =$ n. dispari

$a_n \neq 0$ (diciamo $a_n > 0$)

Allora:

$\forall M < 0 : \exists \delta > 0 : x < -\delta$

$\Longrightarrow p(x) < M < 0$

$$\lim_{x \to -\infty} p(x) = -\infty$$

$\Longrightarrow p(x) < 0$ se $x \to -\infty$

$$\lim_{x \to +\infty} p(x) = +\infty$$

$\Longrightarrow p(x) > 0$ se $x \to +\infty$

($p(x)$ è una funzione continua)

Dal teorema degli zeri:

$$\exists\, c \in \mathbb{R} : \quad p(c) = 0$$

TEOREMA: Ogni polinomio di grado dispari ha almeno una radice.

OSS.: Questo non vale per i polinomi di grado pari:

$$x^2 + 1 \neq 0 \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

Corollario:

$$p(x) = \sum_{j=0}^{n} a_j x^j$$

polinomio di grado dispari
(n = numero dispari)

$(a_n > 0)$

$$\Longrightarrow \quad p(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$$

cioè: $\forall K \in \mathbb{R}$ l'equazione

$$\sum_{j=0}^{n} a_j x^j = K$$

ha almeno una radice reale.

DIM.: È suff. considerare l'eq.:

$$\sum_{j=0}^{n} a_j x^j - K = 0$$

Esempio:

- $\forall K \in \mathbb{R}$: l'equazione:

$$x^5 - x^4 + 10 = K$$

ammette una soluzione.

- Se il polinomio ha grado pari, ciò è falso:

$$x^2 + 1 = K \qquad (K < 0)$$

non ha soluzione

DEF.:

$$f : X \longrightarrow \mathbb{R}$$

1) $x_0 \in X$: x_0 si dice **punto di massimo assoluto** di f se:

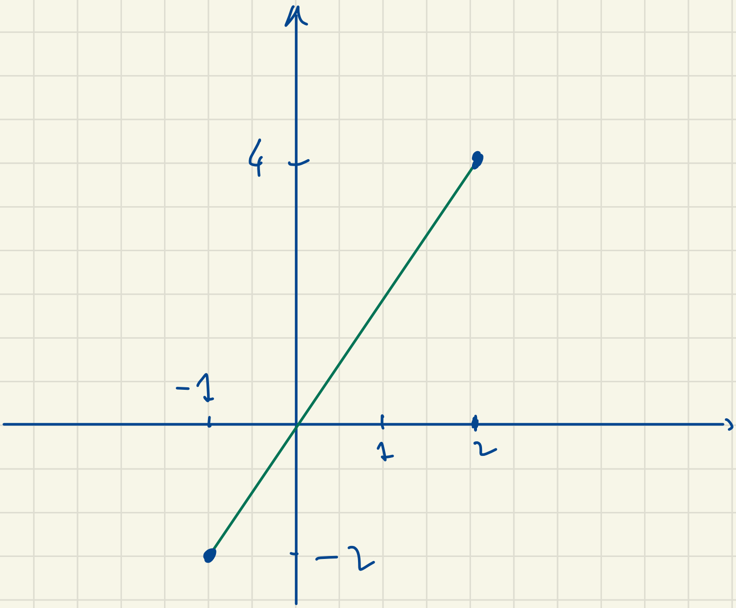
$$f(x) \leq f(x_0) \quad \forall x \in X$$

$f(x_0)$ ⟶ massimo (assoluto) di f

2) $x_0 \in X$: x_0 si dice **punto di minimo assoluto** di f se:

$$f(x_0) \leq f(x) \quad \forall x \in X$$

$f(x_0)$ ⟶ minimo (assoluto) di f

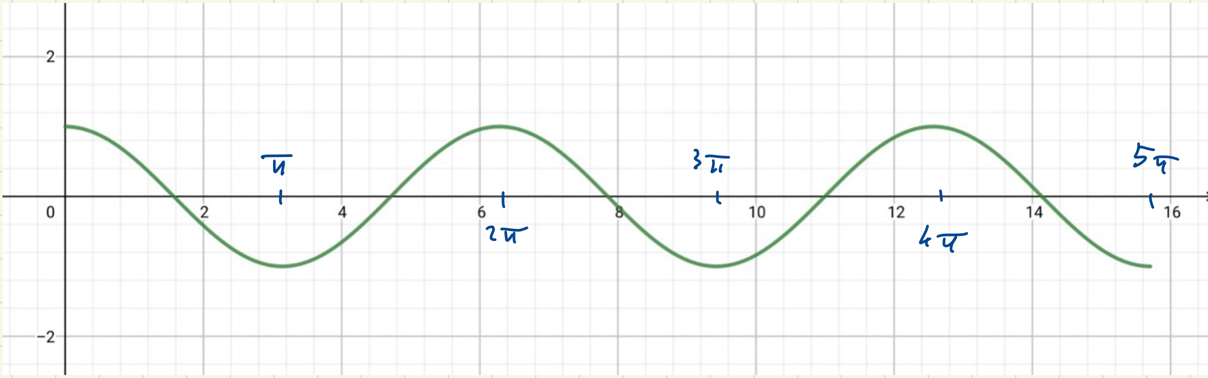


$x_0 = -1$ punto di minimo assoluto di f

$x_0 = 2$ punto di massimo assoluto di f

$f(-1) = -2$ minimo assoluto di f

$f(2) = 4$ massimo assoluto di f



$$f : [0, 5\pi] \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$f(x) = \cos x$$

punti di minimo assoluto:

π , 3π , 5π

punti di massimo assoluto

0, 2π , 4π

massimo assoluto : 1

minimo assoluto : -1

TEOREMA DI WEIERSTRASS:

$f: [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ continua

Allora:

$\exists\, x_0 \in [a,b] : \quad f(x) \leq f(x_0) =: M$
$\forall x \in [a,b]$

$\exists\, x_1 \in [a,b] : m := f(x_1) \leq f(x)$
$\forall x \in [a,b]$

(e quindi:

$$f([a,b]) \subseteq [m, M]$$

$$m = f(x_1) = \min f([a,b])$$
$$M = f(x_0) = \max f([a,b])$$
)

Breve discussione delle ipotesi del teorema di Weierstrass:

$$f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R} \quad \text{continua}$$

intervallo chiuso 1

e limitato 2

3

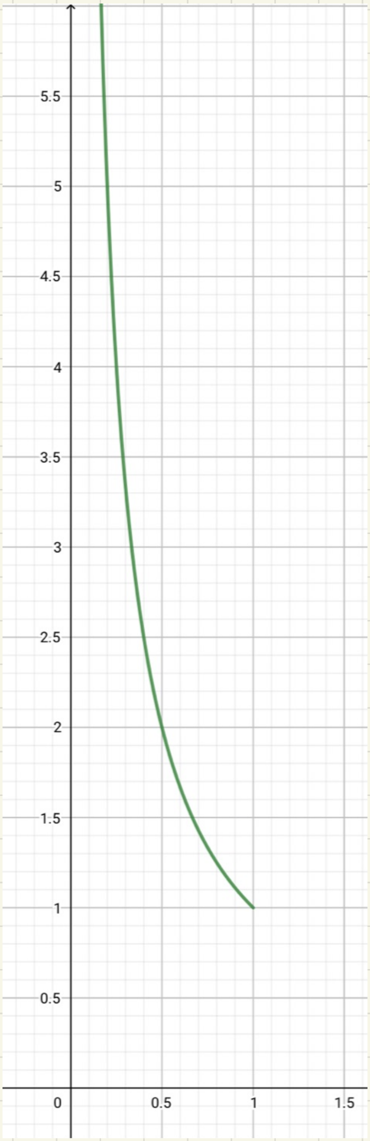
1, 2, 3 sono essenziali se si vuole la tesi del teorema di W.

(1)

$$f :]0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$$

NON è un intervallo chiuso

$$f(x) = \frac{1}{x} \quad \text{continua}$$



$\nexists \max f$

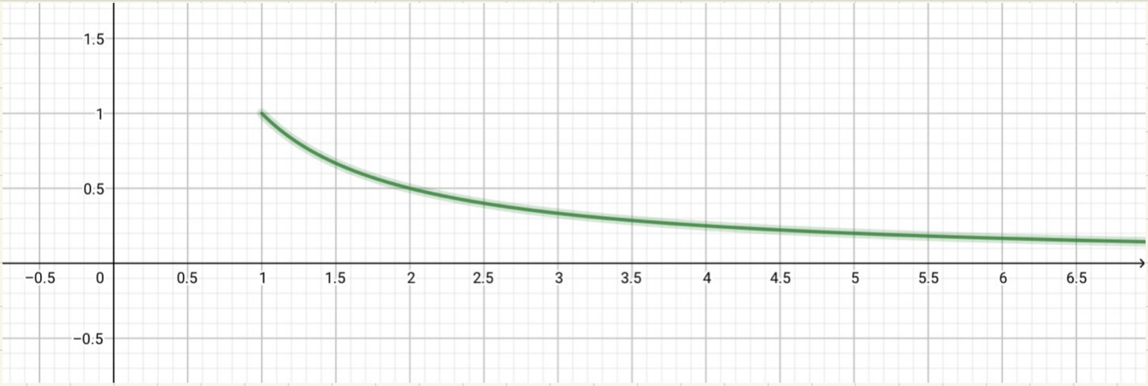
(si è visto che

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty \,)$$

②

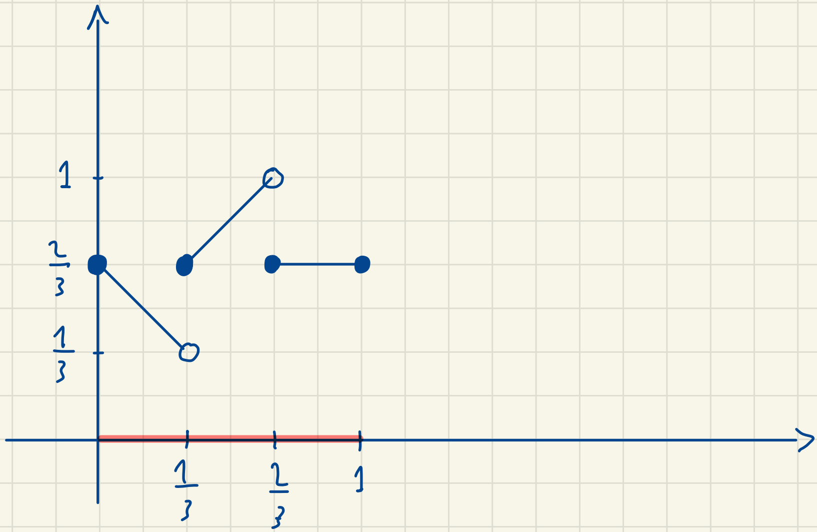
$f : [1, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$

$f(x) = \dfrac{1}{x}$ funzione continua



$\nexists \min f$

③ $h : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$



h <u>non</u> è continua in $[0,1]$

$\nexists$ min h

$\nexists$ max h

Usando il teorema di Weierstrass e il teorema degli zeri si ottiene:

TEOREMA: (di Weierstrass riformulato)

$f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ continua

Allora: $\exists \ M = \max f([a,b])$

$\exists \ m = \min f([a,b])$

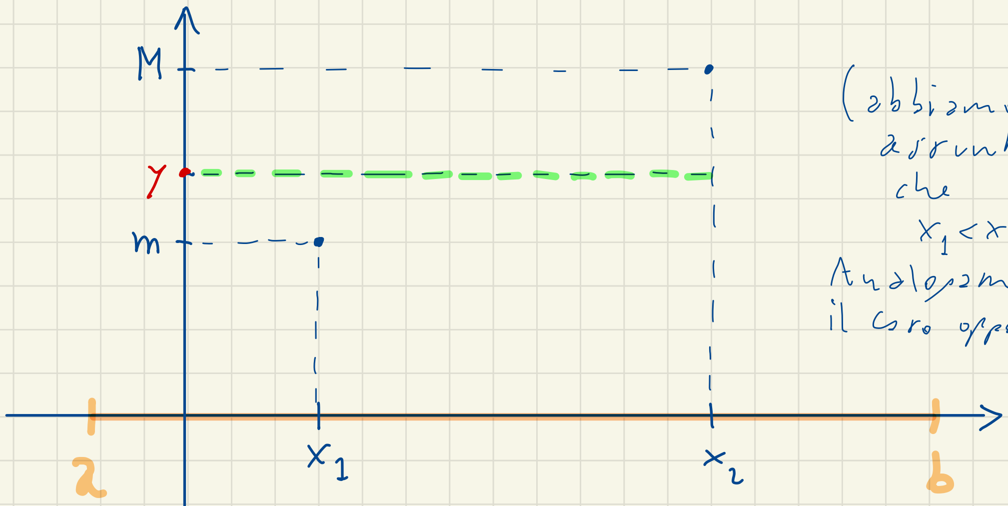
e vale:

$$f([a,b]) = [m, M]$$

Infatti:

$$\exists\, x_1 \in I : f(x_1) = \min f = m$$

$$\exists\, x_2 \in I : f(x_2) = \max f = M$$



(abbiamo assunto che $x_1 < x_2$)
Analogamente il caso opposto

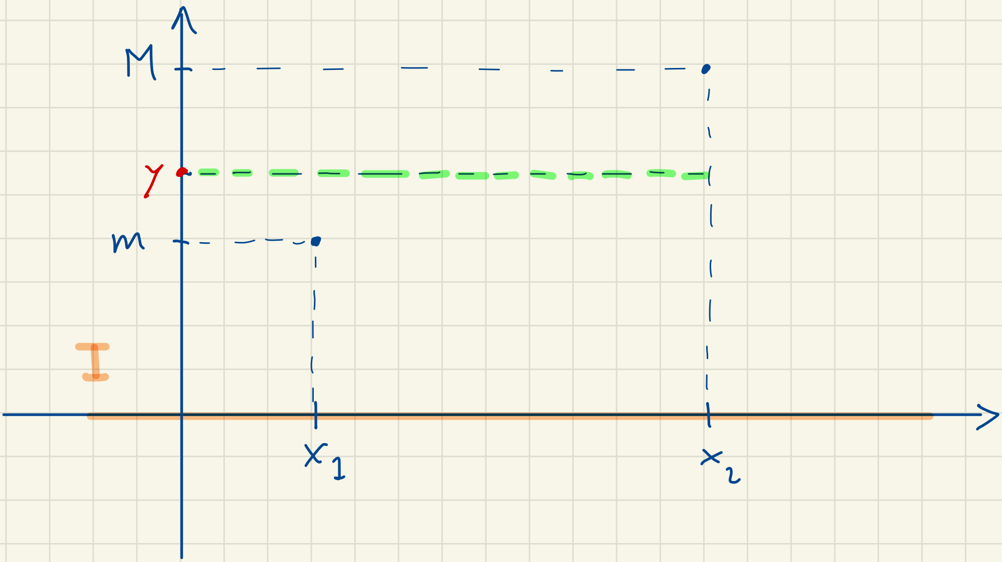
$\left([x_1, x_2] \subseteq I \right.$ poiché I è un intervallo $\left. \right)$

Definiamo:

$$\forall\, y \in \,]m, M[$$

$$\varphi : [x_1, x_2] \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$\varphi(x) = f(x) - y$$



$$g : [x_1, x_2] \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$g(x) = f(x) - y \qquad \text{è continua}$$

$$g(x_1) = \underbrace{f(x_1)}_{= m} - y = m - y < 0$$

$$g(x_2) = \underbrace{f(x_2)}_{= M} - y = M - y > 0$$

Dal teorema degli zeri:

$$\exists\ \bar{x} \in\ ]x_1, x_2[\ \subseteq I : \quad g(\bar{x}) = 0$$

$$\Longleftrightarrow \quad f(\bar{x}) - y = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad f(\bar{x}) = y$$

c.v.d.

Introduzione alla nozione di derivata:

Alcuni richiami preliminari -

DEF.: $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$

① f si dice crescente se $(f \nearrow)$
$\forall x_1, x_2 \in A$:

$$x_1 < x_2 \implies f(x_1) \leq f(x_2)$$

② f si dice strettamente crescente se
$\forall x_1, x_2 \in A$:

$$x_1 < x_2 \implies f(x_1) < f(x_2)$$

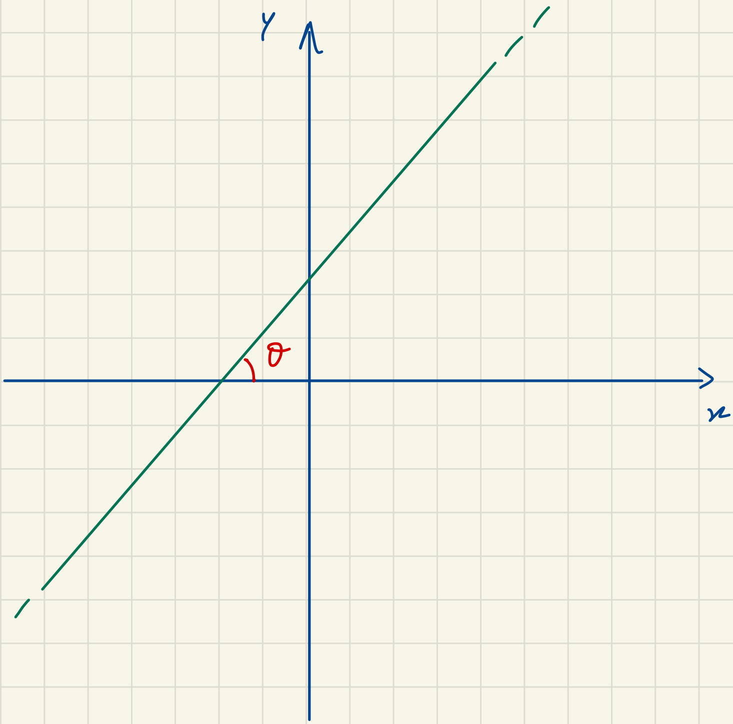
③ f si dice decrescente $(f \searrow)$
$\forall x_1, x_2 \in A$:

$$x_1 < x_2 \implies f(x_1) \geq f(x_2)$$

④ f si dice strettamente decrescente se
$\forall x_1, x_2 \in A$:

$$x_1 < x_2 \implies f(x_1) > f(x_2)$$

Richiami di geometria analitica:



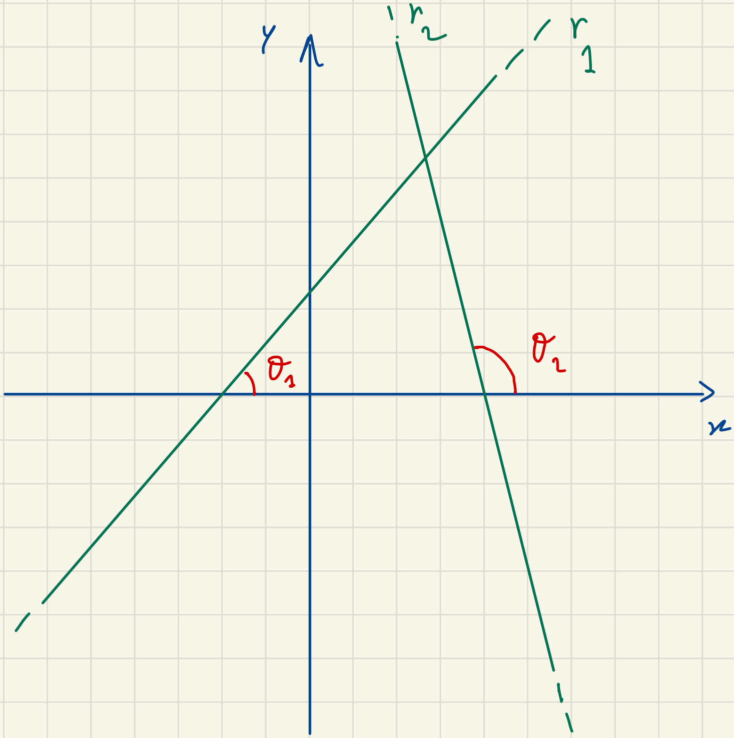
$$y = mx + q$$

eq. generica di una retta (non verticale)

m: coefficiente angolare

q: termine noto

$$m = \tan\theta$$



r_1 : $\quad y = m_1 \cdot x + q_1$

$m_1 \geq 0 \longrightarrow 0 \leq \theta_1 < \pi/2$

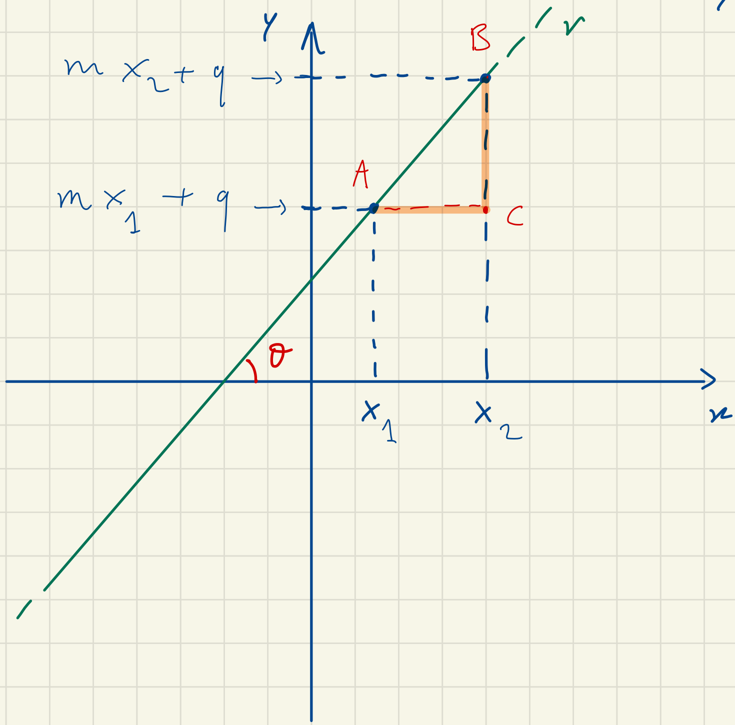
(crescente)

r_2 : $\quad y = m_2 \cdot x + q_2$

$m_2 \leq 0 \longrightarrow \frac{\pi}{2} < \theta_2 \leq \pi$

(decrescente)

$$y = mx + q$$

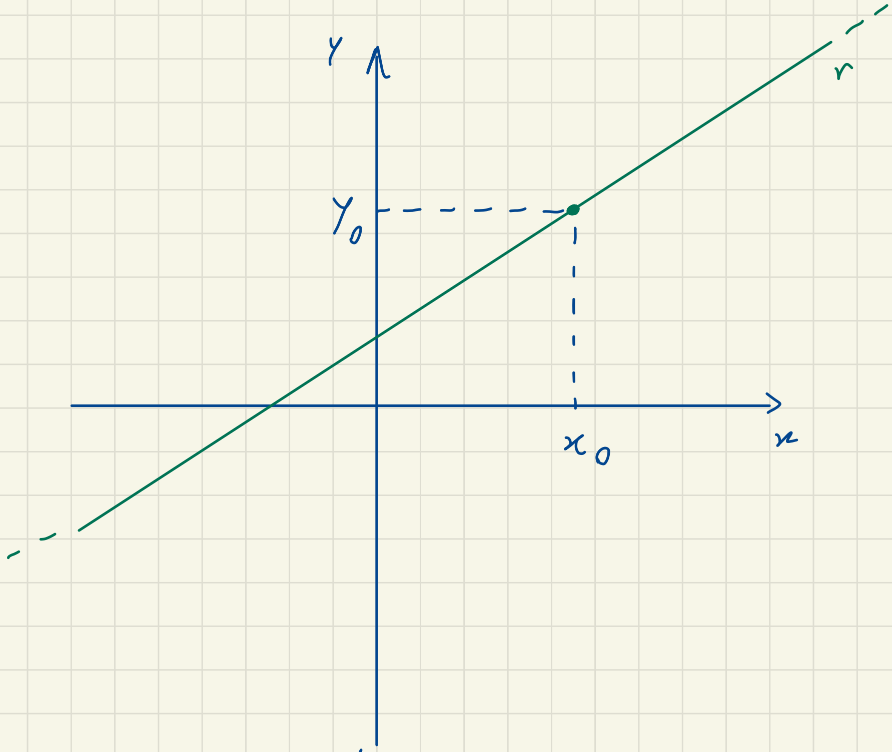


m = rappresenta la "pendenza" della retta r

$$\text{"pendenza"} = \frac{\overline{BC}}{\overline{AC}} = \frac{mx_2 + q - (mx_1 + q)}{x_2 - x_1}$$

$$= \frac{mx_2 - mx_1}{x_2 - x_1} = m$$

"Fascio" di rette per (x_0, y_0):



$$y - y_0 = m(x - x_0)$$

$$y = m(x - x_0) + y_0$$

fascio di rette passanti per (x_0, y_0)

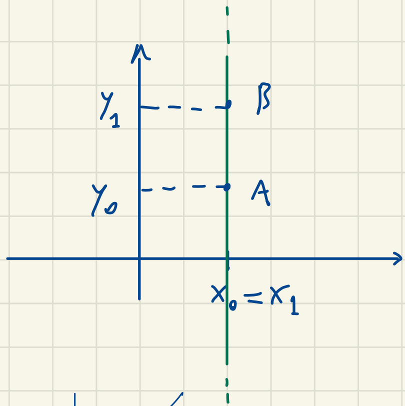
(eccetto la retta $x = x_0$)

Retta passante per due punti:

$A(x_0, y_0)$

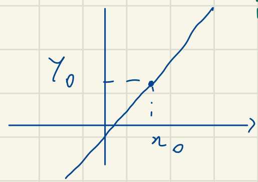
$B(x_1, y_1)$

I se $x_0 = x_1$:



retta AB: $\boxed{x = x_0}$

II se $x_0 \neq x_1$:



retta r per A: $y = m(x - x_0) + y_0$

se vogliamo che r passi per B: $B(x_1, y_1)$ deve verificare

$$y_1 = m(x_1 - x_0) + y_0$$

$$\Longrightarrow \quad m = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}$$

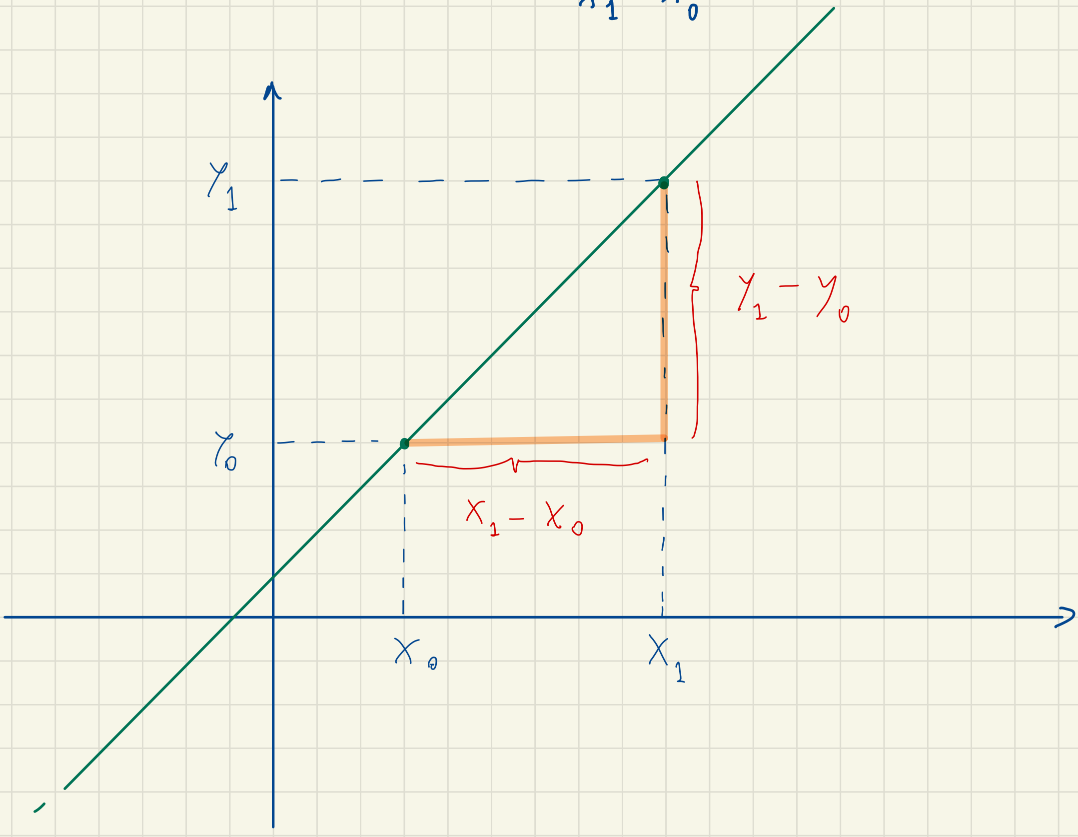
$$\boxed{y = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} \cdot (x - x_0) + y_0}$$

equazione retta AB

il cui coefficiente angolare

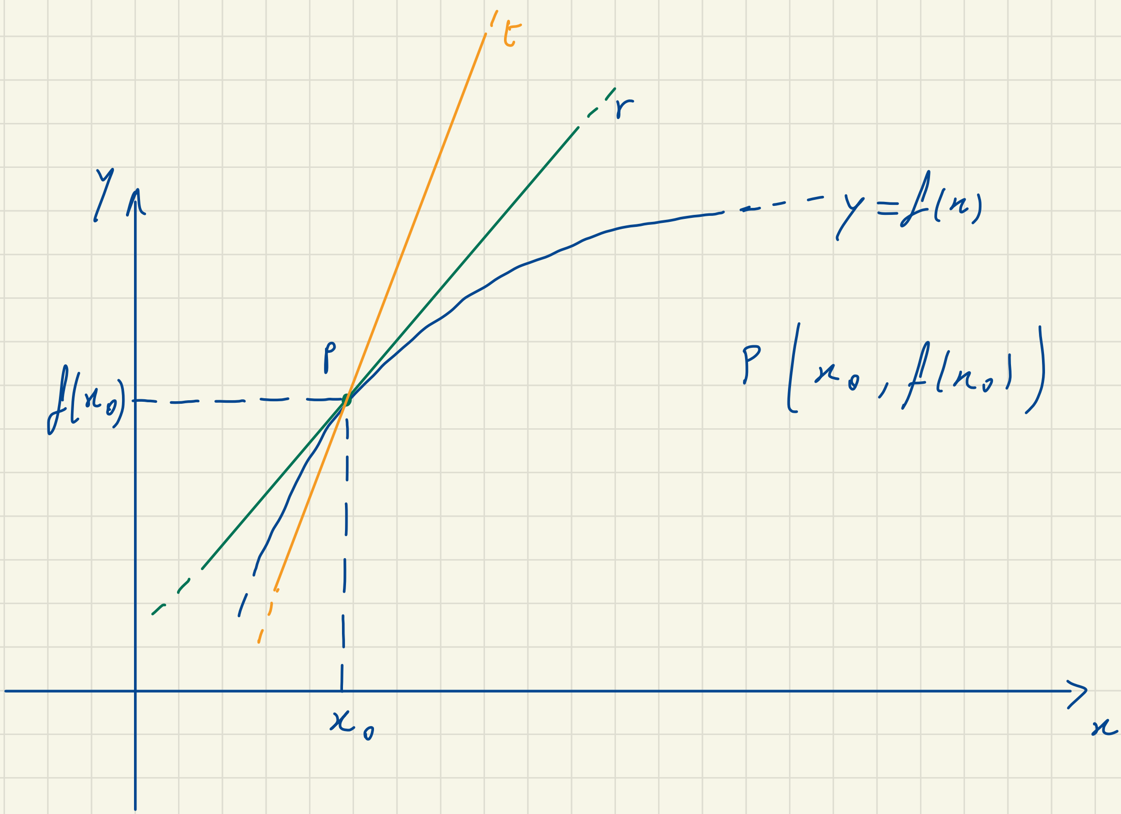
è dato da:

$$\frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}$$



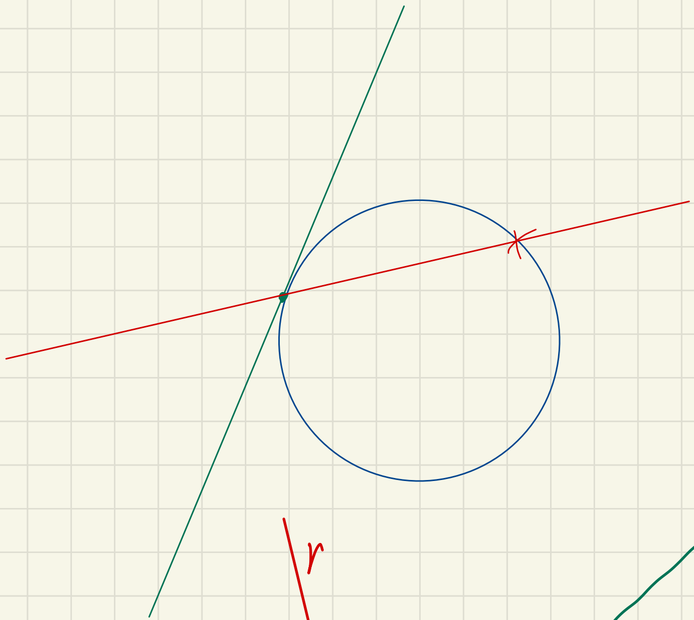
DERIVATA DI UNA FUNZIONE:

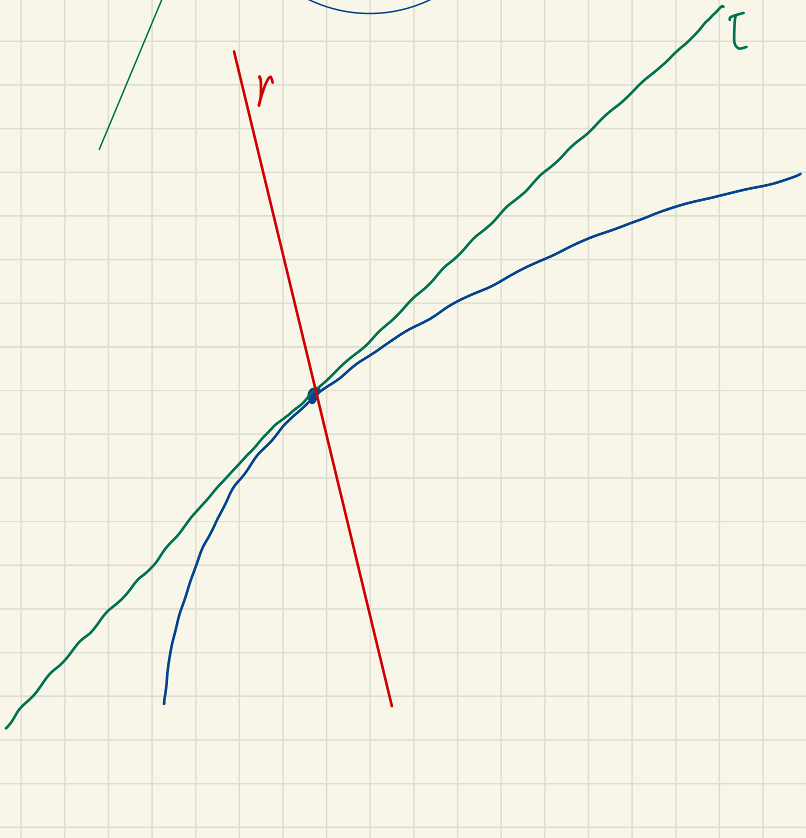
Come si individua (se esiste) la retta tangente ad una curva?



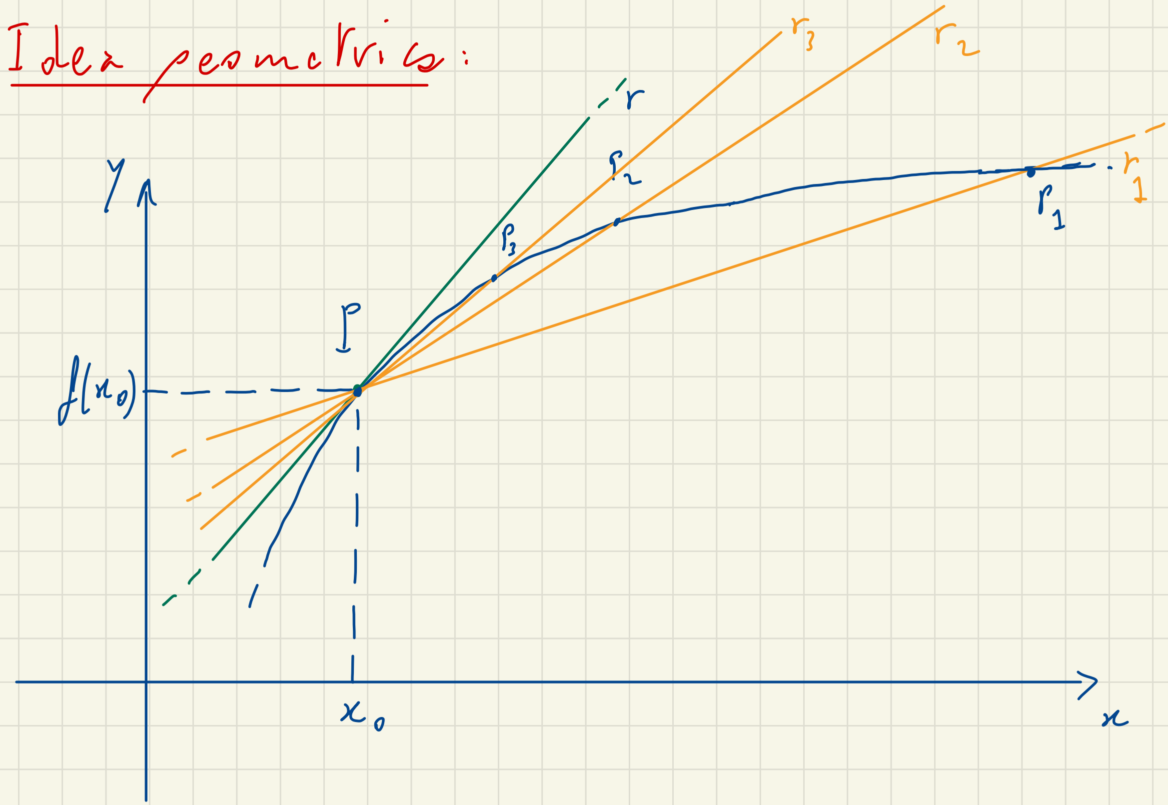
r è tangente al grafico di f

t non è tangente al grafico di f





Idea geometrica:



$(P_n)_n$ è una successioni di punti sul grafico di $y=f(x)$ t.c. $P_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} P$

r_n è la retta P_nP : $y = m_n x + q_n$

r "=" $\lim_{n\to+\infty} P_nP$

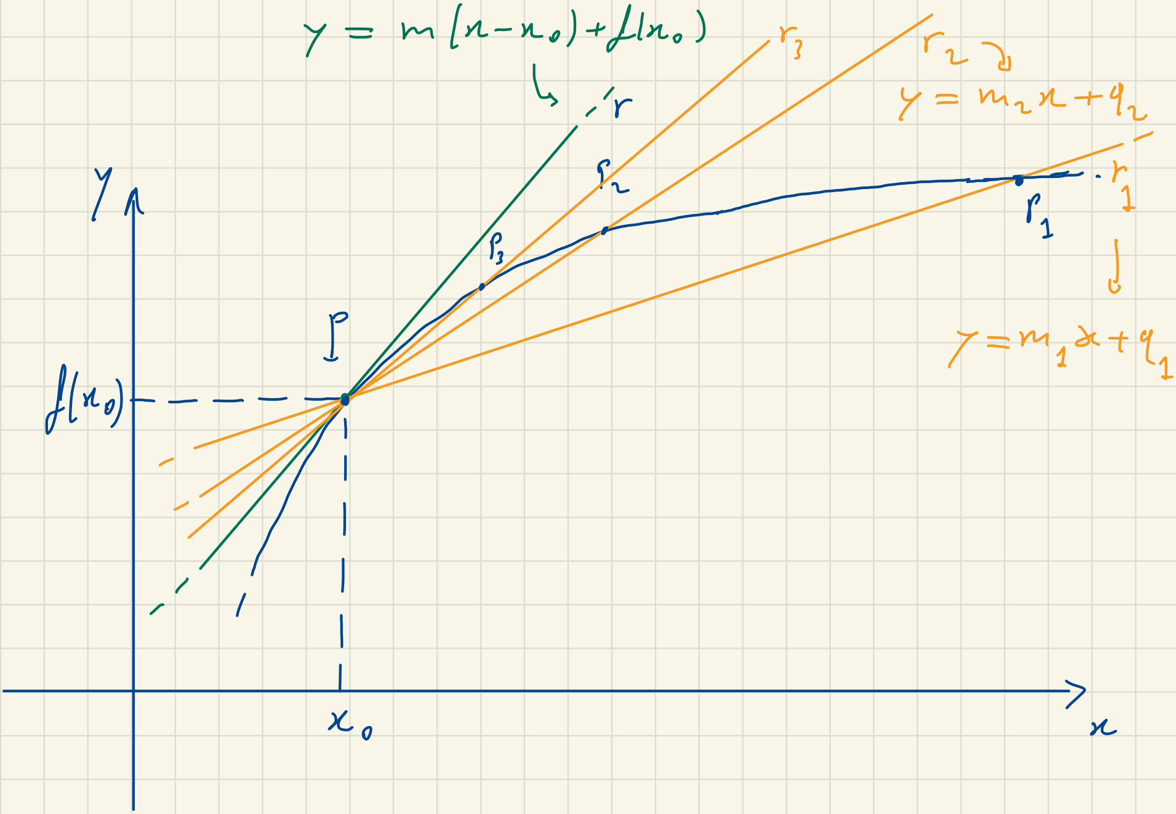
Come si individua la retta r tangente al grafico $y = f(x)$ nel punto $P(x_0, f(x_0))$?

retta per P:

$$y = m \cdot (x - x_0) + f(x_0)$$

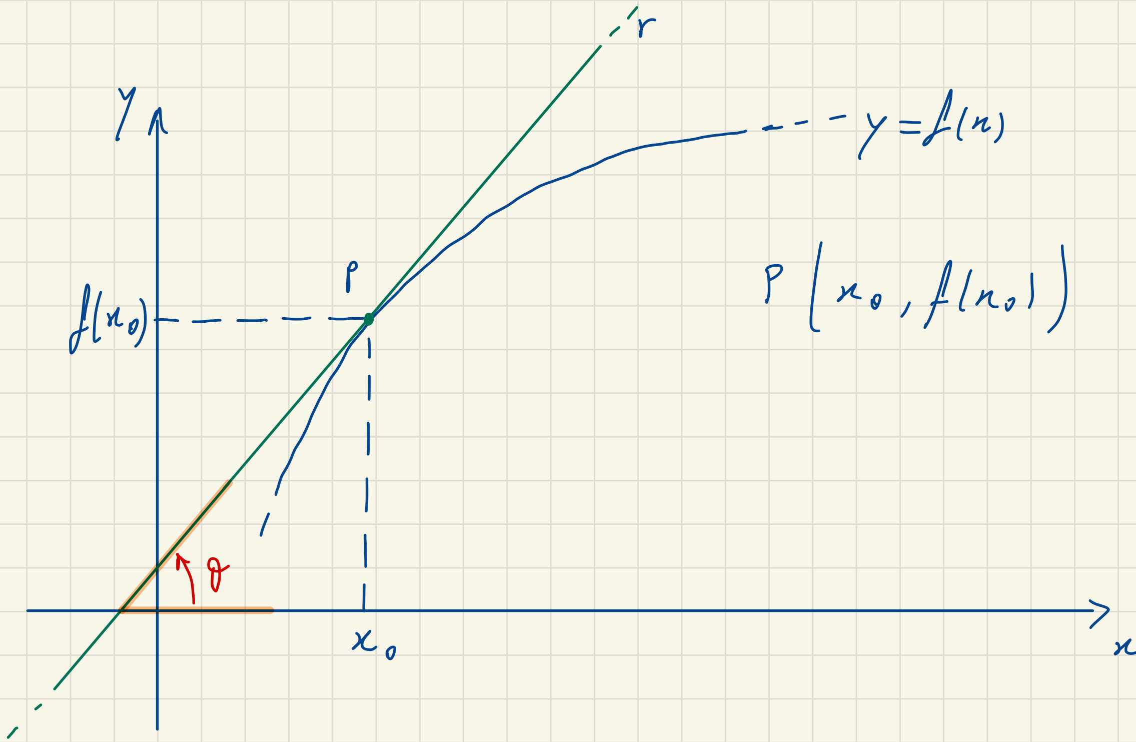
?

il coefficiente angolare m della retta r è la tangente dell'angolo che r forma con l'asse delle ascisse.



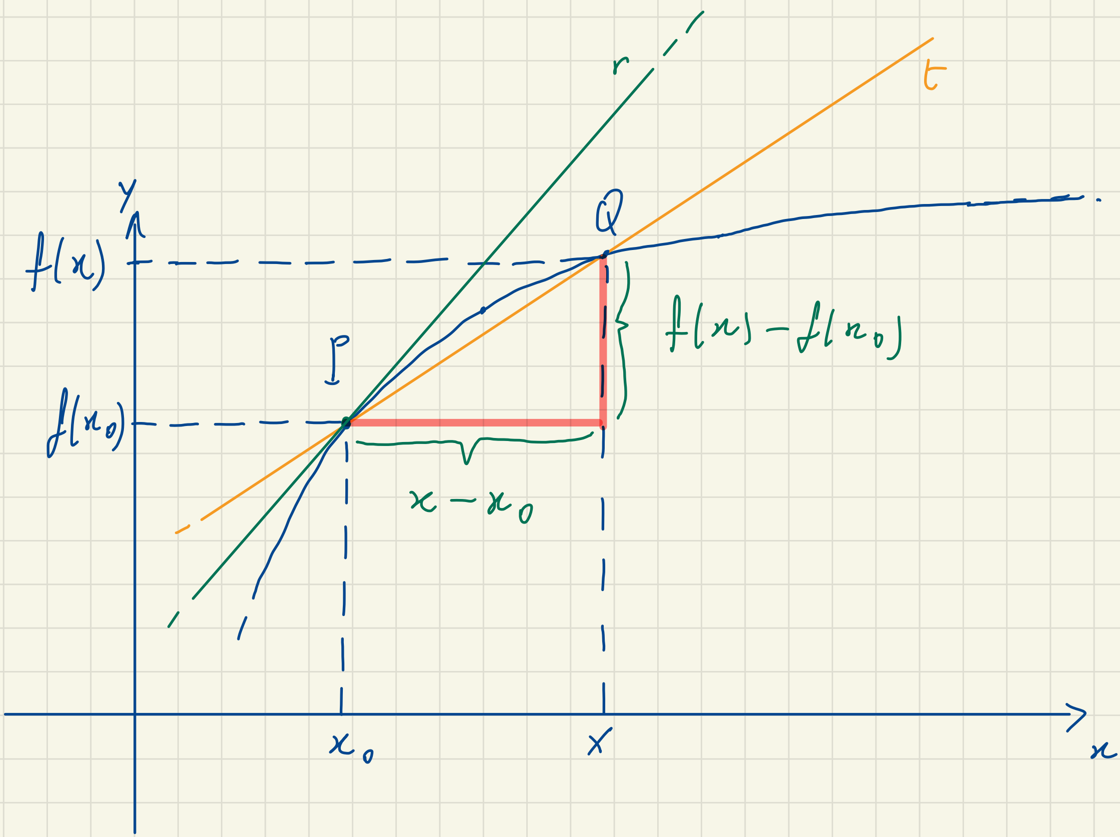
$$r_n: \quad y = m_n \cdot (x - x_0) + f(x_0)$$

$$m = \lim_{n \to +\infty} m_n$$



$$m = \operatorname{tg}\,\theta$$

Definizione rigorosa:

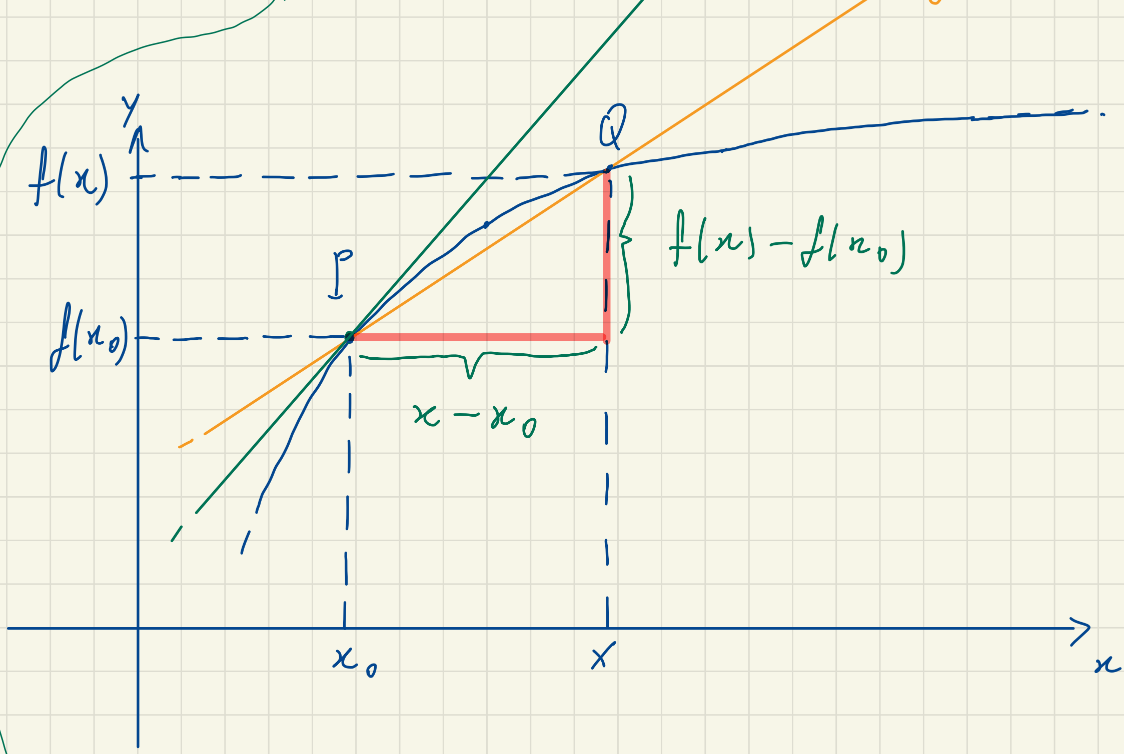


coefficiente angolare della retta PQ

$$\boxed{\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}} \longrightarrow$$

rapporto incrementale di f in x_0

$$y = m(x - x_0) + f(x_0)$$



$$m = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

DEF.:

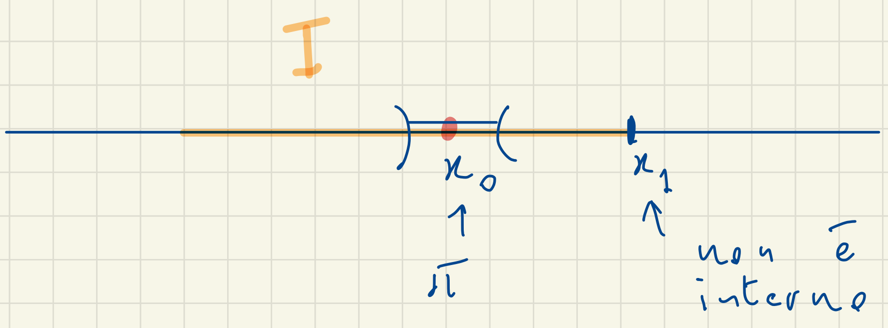
I intervallo $\subseteq \mathbb{R}$

$x_0 \in I$ si dice PUNTO INTERNO a I se esiste un intorno sferico

$$B_r(x_0) = \{ x \in \mathbb{R} \mid |x - x_0| < r \}$$

tale che:

$$B_r(x_0) \subseteq I$$



$$\mathring{I} := \{ x \in I \mid x \text{ è un punto interno a } I \}$$

<u>Esempio:</u>

$$I = [0, 5]$$

$$\Longrightarrow \mathring{I} =]0, 5[$$

$$I = [4, +\infty[$$

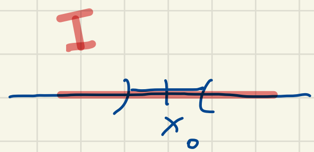
$$\mathring{I} =]4, +\infty[$$

DEF.: (**derivata di f** in x_0)

$$f : I \longrightarrow \mathbb{R}$$

I intervallo

$$x_0 \in \mathring{I}$$



f si dice **derivabile** in x_0 se:

$$\exists \boxed{\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}} \in \mathbb{R}$$

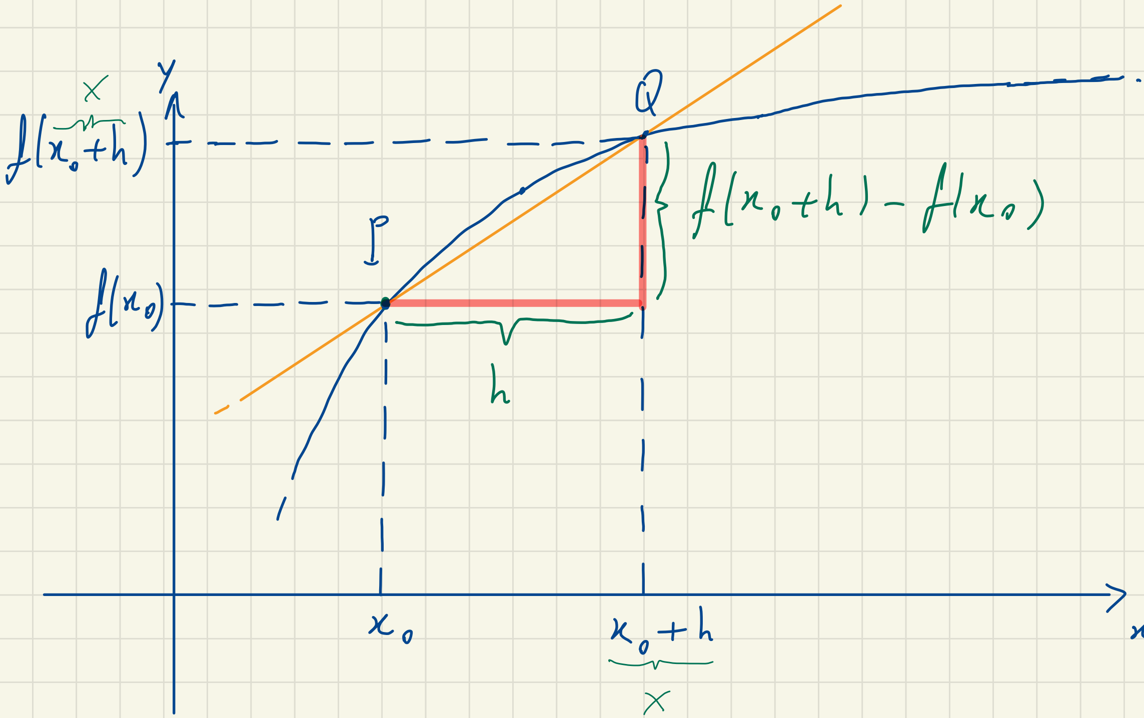
$$\|$$

$$f'(x_0) = \frac{df}{dx}(x_0) = Df(x_0)$$

In tal caso, tale limite si chiama **derivata di f** in x_0.

OSS.:

La stessa definizione si può dare con una notazione diversa:



$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

$$(h = x - x_0)$$

PROP.: $f: I \longrightarrow \mathbb{R}$

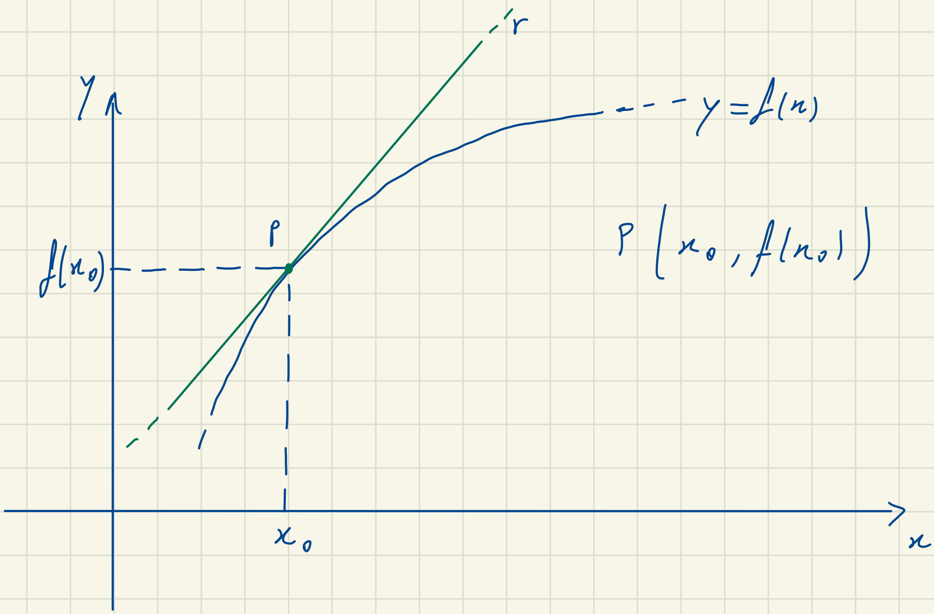
Se f è derivabile in $x_0 \in \mathring{I}$

allora esiste la retta tangente

al grafico di f in $x = x_0$ ed

ha equazione:

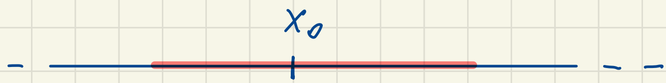
$$r: \quad y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$$



DEF. (Derivata destra e sinistra in x_0)

$$f : I \longrightarrow \mathbb{R}$$

$x_0 \in \mathring{I}$



f si dice derivabile a sinistra in x_0 se:

$$\exists \boxed{\lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}} \in \mathbb{R}$$

$$\parallel$$

$f'_-(x_0)$ (derivata sinistra in x_0)

f si dice derivabile a destra in x_0 se:

$$\exists \boxed{\lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}} \in \mathbb{R} \quad = f'_+(x_0)$$

(derivata destra in x_0)

Come visto in precedenza:

$$f : I \longrightarrow \mathbb{R} \quad , \quad x_0 \in \mathring{I}$$

$$\boxed{\begin{array}{l} f \text{ è derivabile} \\ \text{in } x_0 \end{array}} \longrightarrow f'(x_0)$$

$$\Updownarrow$$

$$\begin{cases} ① \ f \text{ è derivabile a destra di } x_0 \text{ ed è derivabile a sinistra di } x_0 \\ ② \ f_+(x_0) = f_-(x_0) \left(= f'(x_0) \right) \end{cases}$$

NOTA:

$$I = [a, b]$$

$$f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$$

f si dice derivabile in $x_0 = a$ se esiste la derivata destra in a

f si dice derivabile in $x_0 = b$ se esiste la derivata sinistra in b

DEF:

$$f : I \longrightarrow \mathbb{R}$$

f si dice derivabile (su I) se f è derivabile $\forall x_0 \in I$.

In tal caso, da f si può associare una nuova funzione: la sua derivata

$$f' : I \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$x \longmapsto f'(x)$$

Alcuni esempi:

Esempio 1:

$$f(x) = c \qquad , \qquad c \in \mathbb{R}$$

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\overbrace{c - c}^{=0}}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} 0 = 0$$

$$\Longrightarrow \qquad D(c) = 0$$

Alcuni esempi:

Esempio 1:

$$f(x) = x$$

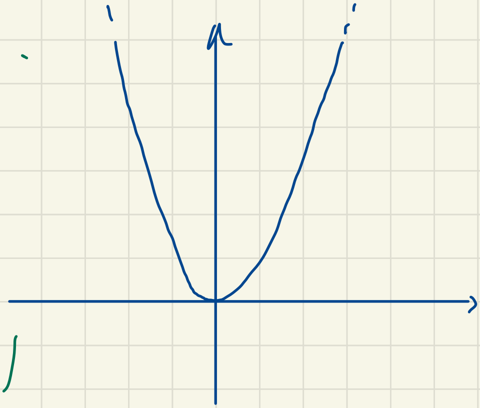
$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\cancel{x_0}+h-\cancel{x_0}}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} 1 = 1 \qquad \forall x_0 \in \mathbb{R}$$

$$\Longrightarrow \quad f'(x) = 1 \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

Esempio (2):



$f(x) = x^2$

$x_0 \in \mathbb{R}$

$$f'(x_0) = \boxed{\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{(x_0+h)^2 - x_0^2}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\cancel{x_0^2} + 2hx_0 + h^2 - \cancel{x_0^2}}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} (2x_0 + h) = 2x_0$$

$$\Longrightarrow \quad f'(x) = 2x$$

Esercizio 1

Provare che:

A $h(x) = x^3$ è derivabile con $h'(x) = 3x^2$

B $\varphi(x) = x^4$ è derivabile con $\varphi'(x) = 4x^3$

2

$$f(x) = x^4$$

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{(x+h)^4 - x^4}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\cancel{x^4} + 4x^3h + 6x^2h^2 + 4xh^3 + h^4 \cancel{- x^4}}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} 4x^3 + \underbrace{6x^2h}_{0} + \underbrace{4xh^2}_{0} + \underbrace{h^3}_{0} = 4x^3$$

$$f'(x) = 4x^3$$