28. Ottobre. 2021

⑦

$$\lim_{x \to 4} \frac{\overbrace{x^2 - 4}^{\to 12}}{\underbrace{\frac{x^2}{2} - x + 1}_{\to 5 \neq 0}} = \frac{12}{5}$$

$(D_a\ 4')$

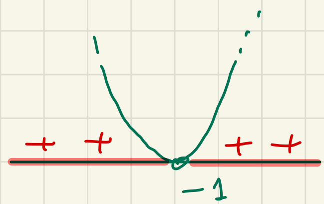
⑧

$$\lim_{x \to -1} \frac{\overbrace{3x + 2}^{\to -1}}{\underbrace{2x^2 + 4x + 2}_{\to 0}} =$$

$$= \lim_{x \to -1} \underbrace{(3x + 2)}_{\to -1} \cdot \frac{1}{2x^2 + 4x + 2}$$

$$2x^2 + 4x + 2 = 2(x^2 + 2x + 1) = 0$$

$\Delta = 0 \qquad x_1 = x_2 = -1$



$$\Rightarrow \lim_{x \to -1} \frac{1}{2x^2 + 4x + 2} = +\infty$$

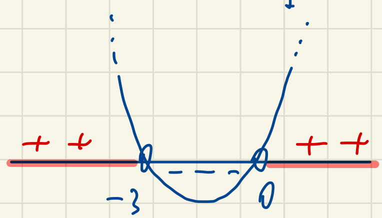
$$\lim_{x\to -1} \underbrace{(3x+2)}_{\to -1}\cdot \underbrace{\frac{1}{2x^2+4x+2}}_{\to +\infty} = -\infty$$

g)

$$\lim_{x\to -3} \frac{\overbrace{x^2+x-2}^{\to 4}}{\underbrace{x^2+3x}_{\to 0}} =$$

$$= \lim_{x\to -3} (x^2+x-2)\cdot \frac{1}{x^2+3x}$$

$$x^2+3x=0 \qquad x_1=-3 \qquad x_2=0$$



$$\lim_{x\to -3^-} \frac{1}{x^2+3x} = +\infty \neq \lim_{x\to -3^+} \frac{1}{x^2+3x} = -\infty$$

$$\Rightarrow \nexists \lim_{x\to -3} \frac{x^2+x-2}{x^2+3x}$$

$$\lim_{x \to -3^-} \frac{x^2+x-2}{x^2+3x} =$$

$$\overset{4}{} \qquad \underset{0}{}$$

$$= \lim_{x \to -3^-} \underbrace{\boxed{(x^2+x-2)}}_{4} \cdot \underbrace{\frac{1}{x^2+3x}}_{+\infty} = +\infty$$

$$\lim_{x \to -3^+} \frac{x^2+x-2}{x^2+3x} =$$

$$\overset{4}{} \qquad \underset{0}{}$$

$$= \lim_{x \to -3^+} \underbrace{\boxed{(x^2+x-2)}}_{4} \cdot \underbrace{\frac{1}{x^2+3x}}_{-\infty} = -\infty$$

"GERARCHIA" DEGLI INFINITI:

per $x \longrightarrow +\infty$

$\log_a x \qquad (a>1)$

$\sqrt[n]{x}$

$p(x) = \sum_{j=0}^{n} a_j x^j \qquad (a_n > 0)$

$a^x \qquad (a>1)$

x^x

velocità crescente

$$f(n) \longrightarrow +\infty$$

$$g(n) \longrightarrow +\infty$$

$$\lim \frac{f(n)}{g(n)} \begin{cases} = 0 & \left\{ \text{$g(n)$ cresce più velocemente di f} \right. \\ +\infty & \left\{ \text{f cresce più velocemente di g} \right. \\ = l \neq 0 & \end{cases}$$

f e g sono infiniti dello stesso ordine

Ad esempio:

$$x^{10^{10^{10}}}$$

è "più lento"

di

$$(1{,}0001)^x$$

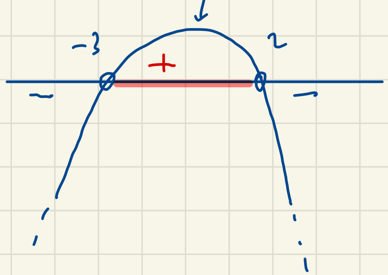
10

$$\lim_{x \to 2^{\pm}} \frac{\overbrace{2x - 3x^2}^{\to 4}}{\underbrace{6 - x^2 - x}_{\to 0}}$$

$$x^2 + x - 6 = 0 \qquad \Delta = 25$$

$$x_{1,2} = \frac{-1 \pm 5}{2} = \begin{cases} -3 \\ 2 \end{cases}$$

$$-x^2 - x + 6$$



$$\lim_{x \to 2^+} \underbrace{(2x - 3x^2)}_{\to -8} \cdot \underbrace{\frac{1}{6 - x^2 - x}}_{\to -\infty} = +\infty$$

$$\lim_{x \to 2^-} \underbrace{(2x - 3x^2)}_{\to -8} \cdot \underbrace{\frac{1}{6 - x^2 - x}}_{\to +\infty} = -\infty$$

Esercizi:

(A)

$$\lim_{x \to -3^{\pm}} \frac{x^4 - 3x^2}{6 - x^2 - x} \qquad \left(= \pm \infty \right)$$

(B)

$$\lim_{x \to \frac{1}{2}} \frac{4x + 1}{4x^2 - 4x + 1} \qquad \left(= + \infty \right)$$

(C)

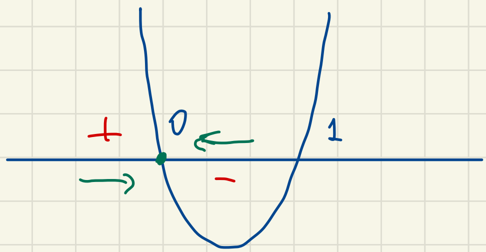
$$\lim_{x \to 0} \frac{x^2 + x + 1}{x^2 - x} \qquad \left(\nexists \right)$$

(D)

$$\lim_{x \to -1^{\pm}} \frac{x^4 - x^3 - 4}{x^2 + 3x + 2} \qquad \left(= \mp \infty \right)$$

c) $$\lim_{x \to 0} \frac{\overbrace{x^2+x+1}^{\to 1}}{\underbrace{x^2-x}_{\to 0}} \qquad (\nexists)$$

$$x^2 - x = (x-1)x = 0 \qquad x_{1,2} = \begin{cases} 0 \\ 1 \end{cases}$$



$$\lim_{x \to 0^-} \frac{x^2+x+1}{x^2-x} =$$

$$= \lim_{x \to 0^-} \underbrace{(x^2+x+1)}_{\to 1} \cdot \underbrace{\frac{1}{x^2-x}}_{\to +\infty} = +\infty$$

$$\lim_{x \to 0^+} \underbrace{\left(x^2 + x + 1\right)}_{\to\, 1} \cdot \underbrace{\frac{1}{x^2 - x}}_{\to\, -\infty} = -\infty$$

$$\nexists \lim_{x \to 0}$$

Esercizi:

$$\left(\sqrt{x^2+5x+6} \geq \sqrt{x^2} = |x| \right)$$

$$x \to +\infty$$

(1)

$$\lim_{x \to +\infty} \boxed{\sqrt{x^2+5x+6} - x}$$

$$\sqrt{A} - \sqrt{B} = \frac{(\sqrt{A}-\sqrt{B}) \cdot (\sqrt{A}+\sqrt{B})}{\sqrt{A}+\sqrt{B}} =$$

$$= \frac{A - B}{\sqrt{A}+\sqrt{B}} \qquad (A, B > 0)$$

$$\frac{x^2+5x+6 - x^2}{\sqrt{x^2+5x+6} + x} =$$

$$= \frac{+5x+6}{\sqrt{x^2+5x+6}+x} =$$

$$= \frac{x\left(+5+\frac{6}{x}\right)}{\sqrt{x^2\left(1+\frac{5}{x}+\frac{6}{x^2}\right)}+x}$$

$$= \frac{x\left(+5+\frac{6}{x}\right)}{\sqrt{x^2\left(1+\frac{5}{x}+\frac{6}{x^2}\right)}+x}$$

$$\sqrt{x^2} = |x|$$

$$= \frac{x\left(+5+\frac{6}{x}\right)}{|x|\sqrt{\left(1+\frac{5}{x}+\frac{6}{x^2}\right)}+x}$$

$$x \longrightarrow +\infty$$
$$\Downarrow$$
$$x > 0$$

$$= \frac{x\left(+5+\frac{6}{x}\right)}{x\cdot\sqrt{\left(1+\frac{5}{x}+\frac{6}{x^2}\right)}+x} =$$

$$= \frac{+5+\frac{6}{x}}{\sqrt{1+\frac{5}{x}+\frac{6}{x^2}}+1} \longrightarrow \frac{+5}{2} = +\frac{5}{2}$$

$$\sqrt{1}+1 = 2$$

$$\left[\ \lim \sqrt{f(x)} \text{ " = " } \sqrt{\lim f(x)}\ \right]$$

$$\frac{x\left(+5+\frac{6}{x}\right)}{x\cdot\sqrt{\left(1+\frac{5}{x}+\frac{6}{x^2}\right)}+x} =$$

$$= \underset{\overset{\shortparallel}{1}}{\frac{x}{x}} \cdot \frac{5+\frac{6}{x}}{\sqrt{1+\frac{5}{x}+\frac{6}{x^2}}+1}$$

② $\lim\limits_{\substack{x \to +\infty \\ (-\infty)}} \boxed{\left(\sqrt{x^2+3x+2} - |x|\right)}$

$$= \frac{\left(\sqrt{x^2+3x+2} - |x|\right)\cdot\left(\sqrt{x^2+3x+2} + |x|\right)}{\sqrt{x^2+3x+2} + |x|}$$

$$= \frac{x^2+3x+2 - x^2}{\left(\sqrt{x^2+3x+2} + |x|\right)} = \frac{3x+2}{\left(\sqrt{x^2+3x+2} + |x|\right)}$$

$$= \frac{3x+2}{\sqrt{x^2\left(1+\frac{3}{x}+\frac{2}{x^2}\right)} + |x|} =$$

$$= \frac{3x+2}{|x|\cdot\sqrt{1+\frac{3}{x}+\frac{2}{x^2}} + |x|} =$$

$$= \frac{x}{|x|} \cdot \frac{3+\frac{2}{x}}{\sqrt{1+\frac{3}{x}+\frac{2}{x^2}} + 1}$$

$$= \boxed{\frac{x}{|x|}} \cdot \boxed{\frac{3 + \frac{2}{x}}{\sqrt{1 + \frac{3}{x} + \frac{2}{x^2}} + 1}}$$

$x \to +\infty$ $\to$ $x > 0$

$= 1$

$x \to -\infty$ $\to$ $x < 0$

$= -1$

$x \to +\infty$ $(-\infty)$

$$\frac{3}{\sqrt{1}+1} = \frac{3}{2}$$

$$\lim_{x \to +\infty} \left(\sqrt{x^2 + 3x + 2} - |x| \right) = \frac{3}{2}$$

$$\lim_{x \to -\infty} \left(\sqrt{x^2 + 3x + 2} - |x| \right) = -\frac{3}{2}$$

$$\lim_{x \to 1} \frac{1}{1-x} = ?$$

$$1 - x > 0 \iff x < 1$$

$$1-x \qquad + \quad + \quad \overset{1}{|} \quad - \quad - \quad -$$

$$\lim_{x \to 1^-} \frac{1}{1-x} = +\infty$$

$$\lim_{x \to 1^+} \frac{1}{1-x} = -\infty$$

$$\Longrightarrow \quad \nexists \quad \lim_{x \to 1} \frac{1}{1-x}$$

$$\nexists \lim_{x \to 1} \frac{3}{1-x^3}$$ (esercizio)

③

$$\lim_{x \to 1} \boxed{\frac{1}{1-x} - \frac{3}{1-x^3}} = -1$$

$$\left(1 - x^3 = (1-x)(1+x+x^2) \right)$$

$$\frac{1+x+x^2-3}{(1-x)(1+x+x^2)} = \frac{x^2+x-2}{(1-x)(1+x+x^2)}$$

$$x^2+x-2 = 0 \qquad x_{1,2} = \frac{-1 \pm 3}{2} = \begin{cases} -2 \\ 1 \end{cases}$$

$$x^2+x-2 = (x-1)(x+2)$$

$$= \frac{(x-1)(x+2)}{(1-x)(1+x+x^2)} = \boxed{-\frac{x+2}{1+x+x^2}}$$

$$\Big\downarrow \; x \to 1$$

$$-\frac{3}{3} = -1$$

$$\lim_{x \to 1} \frac{1}{1-x} - \frac{3}{1-x^3} = -1$$

Si noti che non esistono

$$\lim_{x \to 1} \frac{1}{1-x} \quad , \quad \lim_{x \to 1} \frac{3}{1-x^3}$$

ma esiste il limite della differenza.

Esercizi:

(A)

$$\lim_{x \to -\infty} \sqrt{x^2+1} - \sqrt{x^2+1} = 0$$

(B)

$$\lim_{\substack{x \to +\infty \\ (-\infty)}} x\left(\sqrt{x^2+1} - \sqrt{x^2-1}\right) = \begin{matrix} +1 \\ (-1) \end{matrix}$$

(C)

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{x^2+1+x} - 1}{x} = \frac{1}{2}$$

(D)

$$\lim_{x \to +\infty} e^{\sqrt{x^2+x}} - e^{\sqrt{x^2-1}} = +\infty$$

E

$$\lim_{\substack{x \to +\infty \\ (-\infty)}} \sqrt{x^2 - 2x + 1} - \sqrt{x^2 - 7x + 3} = \frac{5}{2}$$

$$\left(-\frac{5}{2}\right)$$

$$\lim_{x \to +\infty} e^{\sqrt{x^2+x}} - e^{\sqrt{x^2-1}} = +\infty$$

$$= e^{\sqrt{x^2-1}} \left(e^{\sqrt{x^2+x} - \sqrt{x^2-1}} - 1 \right)$$

$$\left[\sqrt{x^2+x} - \sqrt{x^2-1} = \right.$$

$$= \frac{\left(\sqrt{x^2+x} - \sqrt{x^2-1}\right)\left(\sqrt{x^2+x} + \sqrt{x^2-1}\right)}{\sqrt{x^2+x} + \sqrt{x^2-1}}$$

$$= \frac{\cancel{x^2} + x - (\cancel{x^2} - 1)}{\sqrt{x^2+x} + \sqrt{x^2-1}} = \frac{x+1}{\sqrt{} + \sqrt{}}$$

$$\frac{x+1}{\sqrt{x^2+x}+\sqrt{x^2-1}} = \frac{\cancel{x}}{\cancel{x}} \cdot \frac{1+\frac{1}{x}}{\sqrt{1+\frac{1}{x}}+\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}}$$

$$1+\frac{1}{x} \longrightarrow 1$$

$$\sqrt{1}+\sqrt{1} = 2$$

$$\xrightarrow{x \to +\infty} \frac{1}{2}$$

$$e^{\sqrt{x^2-1}} \left(\underbrace{e^{\sqrt{x^2+x}-\sqrt{x^2-1}} - 1} \right) \longrightarrow +\infty$$

$$e^{\sqrt{x^2-1}} \longrightarrow +\infty$$

$$\sqrt{x^2+x}-\sqrt{x^2-1} \longrightarrow \frac{1}{2}$$

$$\xrightarrow{x \to +\infty} e^{\frac{1}{2}} - 1 > 0$$

$$e > 2 \qquad \sqrt{e} = e^{\frac{1}{2}} > \sqrt{2}$$

$$e^{\frac{1}{2}} - 1 > \sqrt{2} - 1 > 0$$

DEF. (punto isolato di un insieme)

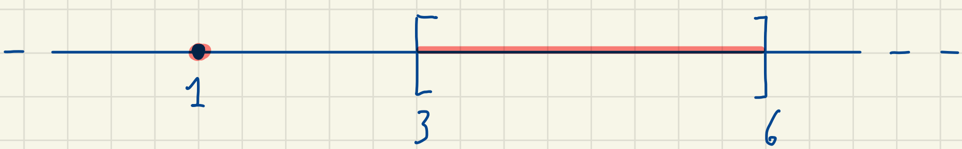
$A \subseteq \mathbb{R}$, $x_0 \in A$

x_0 si dice **punto isolato di A** se $x_0 \notin D(A)$

(cioè: se x_0 NON è un punto di accumulazione di A)

Esempio:

$A = \{1\} \cup [3, 6]$



1 è un punto isolato di A

3 NON è un punto isolato di A

FUNZIONI CONTINUE:

DEF. (funzione continua in x_0)

$f: A \longrightarrow \mathbb{R}$

$x_0 \in A$ $\quad$ ($x_0 \in \mathcal{D}(A)$)

f si dice continua in x_0 se:

① $x_0 \notin \mathcal{D}(A)$ (cioè x_0 è un punto isolato di A)

② $x_0 \in \mathcal{D}(A) \implies \lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$

(i.e.: $\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta = \delta(x_0, \varepsilon) > 0$:
$\forall x \in A$: $\cancel{0} < |x - x_0| < \delta$
$\implies |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$)

si può OMETTERE in questo caso!

Notazione :

Se $f: A \longrightarrow \mathbb{R}$ è continua $\forall \bar{x} \in A$, allora f si dice continua (su A) e si scrive

$$f \in C^0(A)$$

oppure

$$f \in C(A)$$

Cioè :

$$C^0(A) = C(A) = \{ f : A \to \mathbb{R} \mid f \text{ è continua in } a, \ \forall a \in A \}$$

Esempio

1

Dal punto 4' precedente:

$$p(x) = \sum_{j=0}^{n} a_j \, x^j \quad , \quad D(p) = \mathbb{R}$$

$$\lim_{x \to x_0} p(x) = p(x_0)$$

$\Rightarrow$ I polinomi sono funzioni continue su $\mathbb{R}$

cioè:

$$p(x) \in C^0(\mathbb{R}) \quad \left(C(\mathbb{R}) \right)$$

(2) $p(x)$, $q(x)$ polinomi

Dall' algebra dei limiti:

$x_0 \in \mathbb{R}$: $q(x_0) \neq 0$

$$\lim_{x \to x_0} \frac{p(x)}{q(x)} = \frac{p(x_0)}{q(x_0)}$$

Quindi il rapporto di due polinomi è una funzione continua sul suo dominio naturale.

(<u>NOTA</u>: data "una funzione" il suo dominio naturale è il più grande sottoinsieme di $\mathbb{R}$ su cui f è ben definita)

Dai teoremi di algebra dei limiti segue la seguente:

PROP.: $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$, $g : B \longrightarrow \mathbb{R}$

f, g continue in $x_0 \in A \cap B$

Allora:

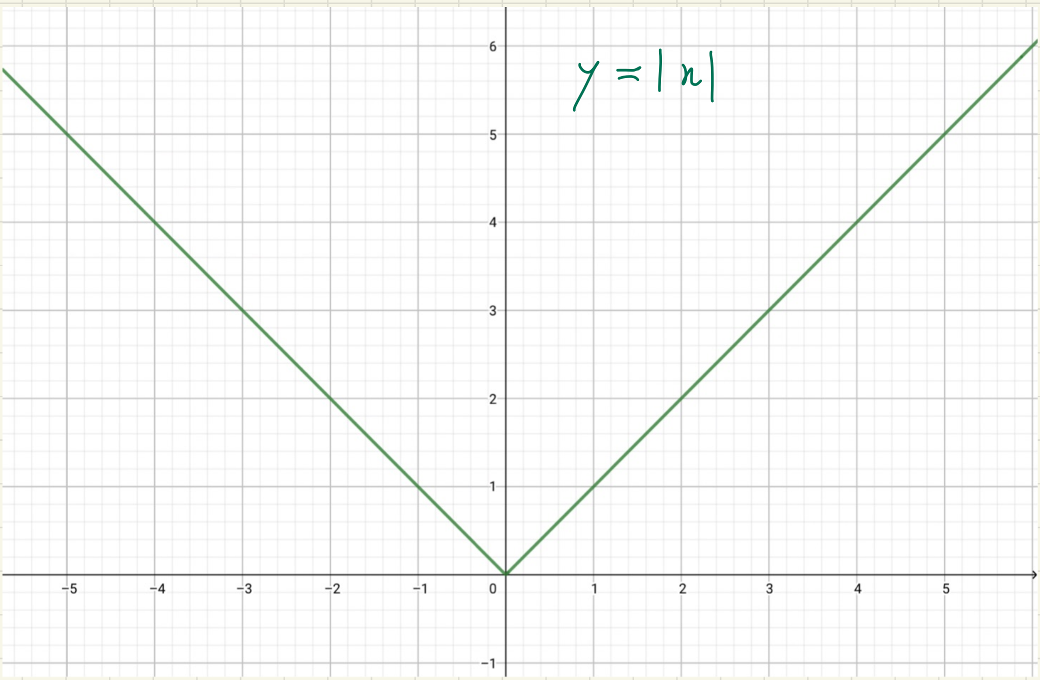
1. $f \pm g$ è continua in x_0
2. $c \in \mathbb{R}$: $c \cdot f$ è continua in x_0
3. $f \cdot g$ è continua in x_0
4. $\frac{f}{g}$ è continua in x_0 (se $g(x_0) \neq 0$)
5. $|f|$ è continua in x_0 (dim.: usando la disuguaglianza: $$\big||A| - |B|\big| \leq |A - B|$$)

OSS.:

$f(x) = x$ è continua

$$\Downarrow$$

$\varphi(x) = |x|$ è continua



DIM.:

$$f(x) = |x| = \begin{cases} x & \text{se } x \geq 0 \\ -x & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

$x_0 \in \mathbb{R}: \quad x_0 \neq 0$

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} |x| =$$

$$= \begin{cases} \text{se } x_0 > 0: & \lim_{x \to x_0} |x| = \lim_{x \to x_0} x = \underset{\overset{\parallel}{|x_0|}}{x_0} \\ \text{se } x_0 < 0: & \lim_{x \to x_0} |x| = \lim_{x \to x_0} -x = \underset{\underset{|x_0|}{\parallel}}{-x_0} \end{cases}$$

se $\underline{x_0 = 0}$:

$$\lim_{x \to 0^-} |x| = \lim_{x \to 0^-} -x = 0$$

$$\lim_{x \to 0^+} |x| = \lim_{x \to 0^+} x = 0$$

$=$

re $\underline{x_0 = 0}$:

$$\lim_{x \to 0^-} |x| = \lim_{x \to 0^-} -x = 0$$

$$\lim_{x \to 0^+} |x| = \lim_{x \to 0^+} x = 0$$

$$\Longrightarrow \quad \lim_{x \to 0} |x| = 0 = |0|$$

Oss.:

Non tutte le funzioni sono continue. Esempio:

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{se } x \neq 0 \\ 2 & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

Non è continua in $\bar{x} = 0$.

Infatti:

$$\lim_{x \to 0} f(x) = \lim_{x \to 0} x^2 = 0$$

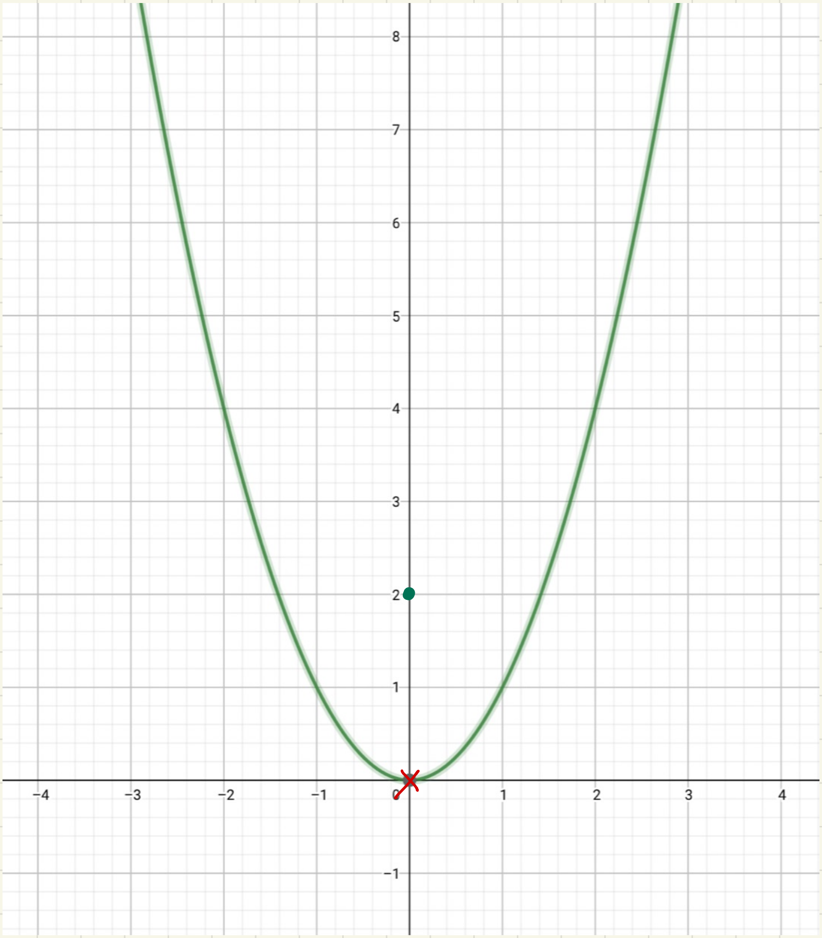
nella definizione di $\lim_{x \to 0}$

x è vicino a 0, ma è

sempre $\neq 0$!!

$$\neq$$

$$f(0) = 2$$



f non è continua in $\bar{x}=0$,
ma lo è per ogni altro punto.

Esercizio (difficile!)

$$f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{n} & \text{se } x = \frac{1}{n},\ n \in \mathbb{N}^{\neq 0} \\ 0 & \text{se } x \in [0,1] \wedge x \neq \frac{1}{n}\ \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

$\Longrightarrow$ (1) $\forall \bar{x} \in [0,1] : \exists \lim_{x \to \bar{x}} f(x)$ $\left(= ?\right)$

(2) $\forall n \in \mathbb{N} : f$ <u>non</u> è continua in $\frac{1}{n}$

(3) f è continua $[0,1] \setminus \left\{ \frac{1}{n} \,\middle|\, n \in \mathbb{N} \right\}$

PROP. : $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{tg} x$ sono funzioni continue sul loro dominio naturale.

DIM. :

Iniziamo con la funzione $\sin x$.

Si tratta di provare che:

$$\lim_{x \to x_0} \sin x = \sin x_0 \qquad \forall x_0 \in \mathbb{R}$$

$$\sin x = \sin\big[x_0 + \underbrace{(x - x_0)}_{= h}\big]$$

$x \to x_0$ equivale a $h \to 0$

o, equivalentemente, che

$$\lim_{h \to 0} \sin(x_0 + h) = \sin x_0$$

Dalle formule di addizione:

$$\sin(x_0+h) = \sin x_0 \cdot \underbrace{\boxed{\cos h}}_{\substack{\downarrow\, h\to 0\\ 1}} + \cos x_0 \cdot \underbrace{\boxed{\sin h}}_{\substack{\downarrow\, h\to 0\\ 0}}$$

(dalla lez. 19/10/20)

Quindi:

$$\lim_{h\to 0} \sin(x_0+h) = \sin x_0$$

c.v.d.

Analogamente si prova che

$$\lim_{x\to x_0} \cos x = \cos x_0$$

(ESERCIZIO!)

La continuità della $tg\, x$:

$$\lim_{x \to x_0} tg\, x = tg\, x_0$$

$$x_0 \in D(tg) = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \quad k \in \mathbb{Z} \right\}$$

segue da :

$$tg\, x = \frac{\sin x}{\cos x}$$

è il rapporto di due funzioni continue

PROP.:

$f: A \longrightarrow \mathbb{R}$, $g: B \longrightarrow \mathbb{R}$

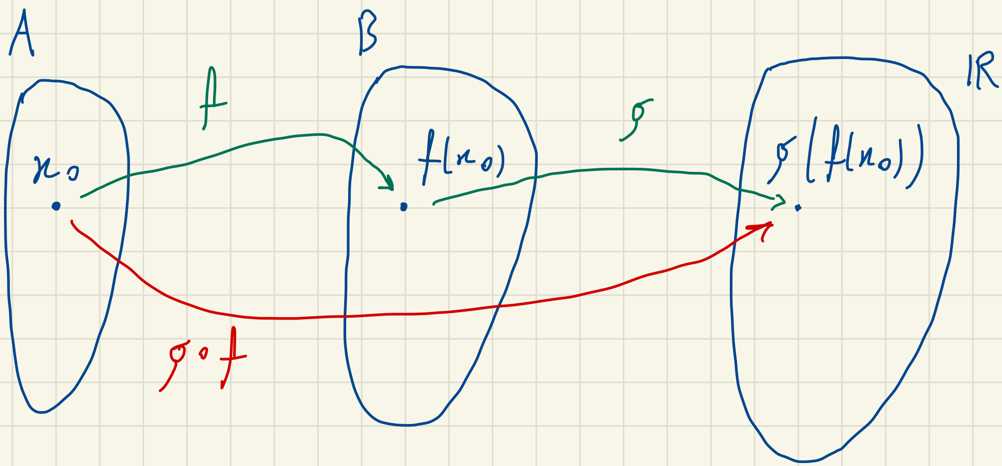
$x_0 \in A$, $f(x_0) \in B$

f è continua in x_0

g è continua in $f(x_0)$

Allora:

$g \circ f : x \longmapsto g(f(x))$ è continua in x_0



ATTENZIONE:

La composizione di funzioni NON è commutativa!

$$f \circ g \neq g \circ f$$

Esempio:

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \qquad g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto x^3 + 2x - 1 \qquad x \longmapsto \sin x$$

$$f \circ g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \quad , \quad g \circ f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$f \circ g (x) = f(g(x)) = f(\sin x) =$$
$$= \sin^3 x + 2 \sin x - 1$$

$$\neq$$

$$g \circ f (x) = g(f(x)) = g(x^3 + 2x - 1) =$$
$$= \sin(x^3 + 2x - 1)$$

Esempio:

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \qquad\qquad g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \mapsto x^3 + 2x - 1 \qquad\qquad x \longmapsto \sin x$$

$$f \circ g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \quad , \quad g \circ f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$f \circ g\,(x) = f(g(x)) = f(\sin x) =$$
$$= \sin^3 x + 2 \sin x - 1$$

$$g \circ f\,(x) = g(f(x)) = g\left(x^3 + 2x - 1\right) =$$
$$= \sin\left(x^3 + 2x - 1\right)$$

f, g sono continue su $\mathbb{R}$

$\Longrightarrow$

$\sin^3 x + 2 \sin x - 1$

$\sin\left(x^3 + 2x - 1\right)$

sono continue

Quindi:

- $$\lim_{x \to 1} \sin\left(x^3 + 2x - 1\right) =$$

$$= \sin\left(1^3 + 2 \cdot 1 - 1\right) = \sin 2$$

- $$\lim_{x \to 1} \left(\sin^3 x + 2 \sin x - 1\right) =$$

$$= \sin^3(1) + 2 \sin(1) - 1$$

ALCUNI RISULTATI SENZA DIM.:

PROP.: La funzione esponenziale

$$f(x) = a^x$$

è continua su $\mathbb{R}$.

(Senza dimostrazione – segue dal limite notevole

$$\lim_{x \to 0} \frac{a^x - 1}{x} = 1$$

)

PROP.:

funz. diretta		funz. inversa
x^n	$\longrightarrow$	$\sqrt[n]{x}$
a^x	$\longrightarrow$	$\log_a x$
$\sin x$	$\longrightarrow$	$\arcsin x$
$\cos x$	$\longrightarrow$	$\arccos x$
$\tan x$	$\longrightarrow$	$\arctan x$

Le funzioni inverse sono continue sul loro dominio naturale _

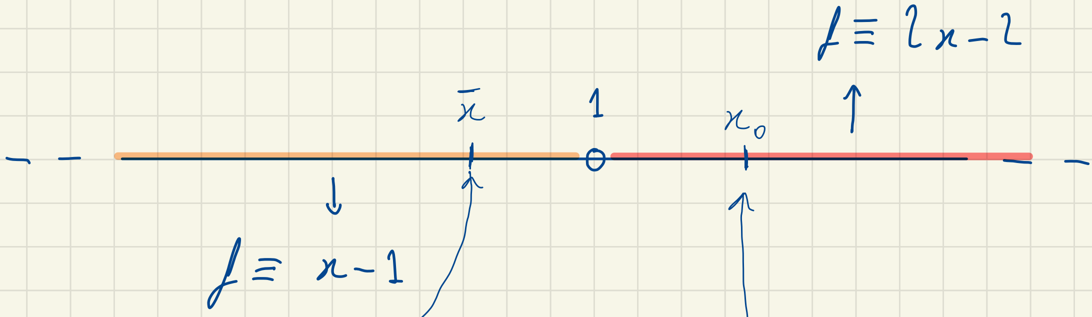
OSSERVAZIONE:

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0) \iff \begin{cases} ① \ \exists \text{ finiti } \lim_{x\to x_0^{\pm}} f(x) \\ ② \ \lim_{x\to x_0^-} f(x) = \lim_{x\to x_0^+} f(x) \\ ③ \ \lim_{x\to x_0^-} f(x) = \lim_{x\to x_0^+} f(x) = f(x_0) \end{cases}$$

Esercizio:

$$f(x) = \begin{cases} x-1 & \text{se } x \leq 1 \\ 2x-2 & \text{se } x > 1 \end{cases}$$

f è continua?



$\bar{x} \in \,]-\infty, 1[$

$$\lim_{x \to \bar{x}} f(x) = \lim_{x \to \bar{x}} x-1 = \bar{x}-1 = f(\bar{x})$$

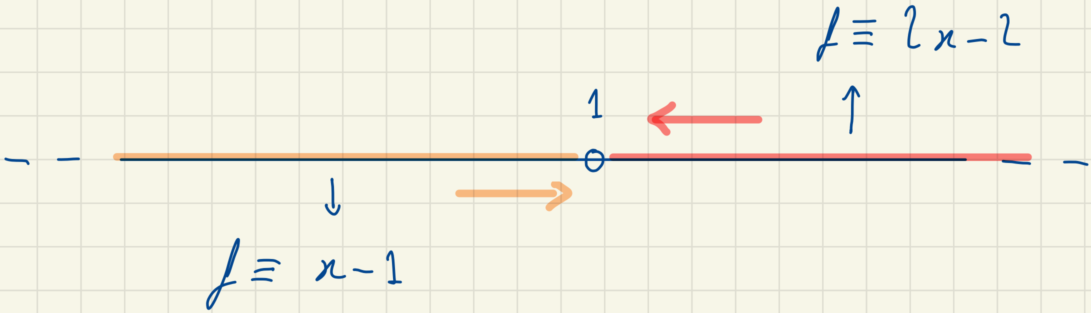
$\Rightarrow f$ è continua in $\bar{x}$

$x_0 \in \,]1, +\infty[$

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} 2x-2 = 2x_0-2 = f(x_0)$$

$\Rightarrow f$ è continua in x_0

Rimane da considerare $x = 1$



$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^-} x-1 = 0$$

$$\lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1^+} 2x-2 = 0$$

$\Rightarrow$

$$\lim_{x \to 1} f(x) = 0 \qquad f(1) = 0$$

$$\lim_{x \to 1} f(x) = f(1)$$

$\Rightarrow$ f è continua.

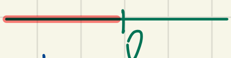
Esempio:

$$f(x) = \begin{cases} x-1 & \text{se } x \leq 0 \\ 2x+1 & \text{se } x > 0 \end{cases}$$

f è continua?

Come prima, f è continua su $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.

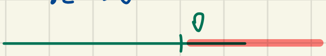
Vediamo in $x=0$.



$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} x-1 = -1$$

$$\neq$$

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} 2x+1 = 1$$



f NON è continua in $x=0$

Esercizio 1

Scegliere $\alpha \in \mathbb{R}$ in modo che

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin x}{x} & \text{se } x \neq 0 \\ \alpha & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

sia continua su $\mathbb{R}$ e dimostrarlo

(Risp.: $\alpha = 1$)

Esercizio 2 :

Per quali valori $b \in \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} bx - 2 & \text{se} \quad x \geq -1 \\ 2b^2 x^2 + 3x + 1 & \text{se} \quad x < -1 \end{cases}$$

è continua ?

(Risp. : $b = 0 \; , \; -\frac{1}{2}$)

Esercizio 3 :

Per quali $\alpha \in \mathbb{R}$ è continua

$$h(x) = \begin{cases} x^2 + 2x + 3 & x \geq -1 \\ e^{\alpha x^2} & x < -1 \end{cases}$$

(Risp. : $\alpha = \ln 2$)

Funzioni continue

Teorema degli zeri
(con dimostrazione)

(I)

Teorema di Weierstrass
(senza dimostrazione)

(II)

T. di Weierstrass (esteso)

ALCUNI RISULTATI PRELIMINARI:

(I)

LEMMA: prelim. 1

$(b_n)_n \subseteq \mathbb{R}$,

(I) $b_n < 0 \quad \forall n \qquad$ ((II) $b_n > 0 \quad \forall n$)

$\lim_{n\to+\infty} b_n = \ell \in \mathbb{R}$

$\Longrightarrow \quad \ell \leq 0 \qquad (\ell \geq 0)$

DIM.: ((I))

Per negazione: assumiamo $\ell > 0$.

$\lim_{n\to+\infty} b_n = \ell$ significa che:

$\forall \varepsilon > 0, \ \exists \bar{n} \in \mathbb{N} : \forall n \geq \bar{n}$

$\Longrightarrow \quad |b_n - \ell| < \varepsilon$

cioè:

$$\ell - \varepsilon < b_n < \ell + \varepsilon$$

$\forall \varepsilon > 0 \,, \quad \exists \bar{n} \in \mathbb{N} : \forall n \geq \bar{n}$

$\Longrightarrow \quad |b_n - \ell| < \varepsilon$

cioè:

$$\ell - \varepsilon < b_n < \ell + \varepsilon$$

Scegliamo $\quad \varepsilon = \dfrac{\ell}{2} > 0$

$\forall n \geq \bar{n}$:

$$b_n > \ell - \varepsilon = \ell - \frac{\ell}{2} = \frac{\ell}{2} > 0$$

in contraddizione con Hp

Esempio:

$$b_n = -\frac{1}{n} < 0 \quad \forall n$$

$$\lim_{n \to +\infty} \left(-\frac{1}{n}\right) = 0$$

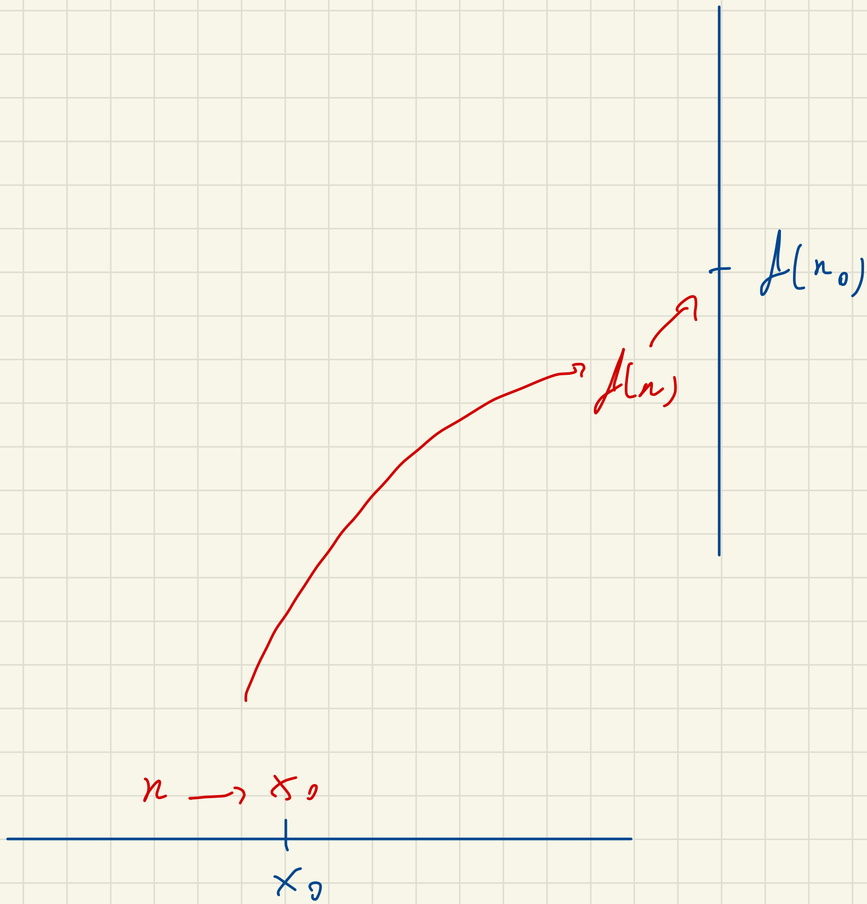
LEMMA: (preliminare ②)

$f : A \longrightarrow \mathbb{R}$, $\bar{x} \in A \cap D(A)$

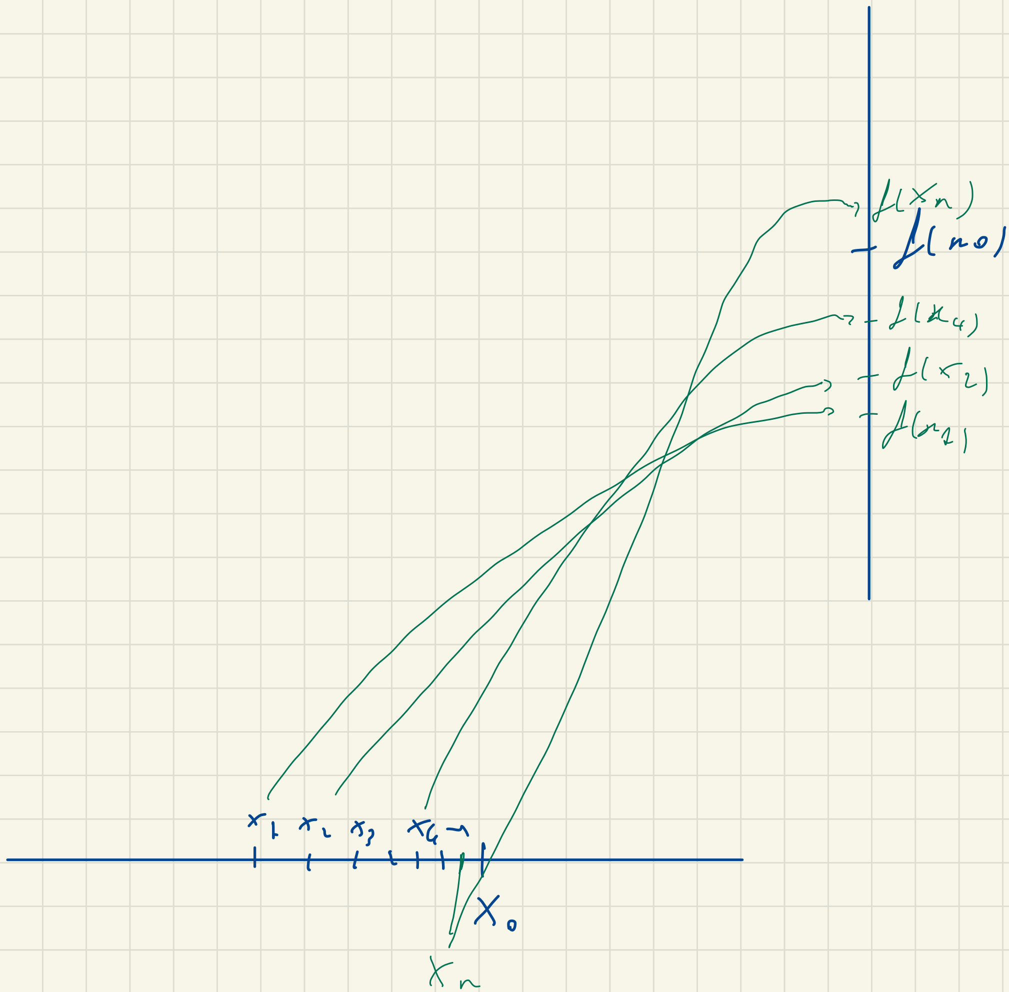
f è continua in $\bar{x}$ (i.e. $\lim_{x \to \bar{x}} f(x) = f(\bar{x})$)

Allora : $\begin{cases} \forall \, (x_n)_n \subseteq A : x_n \longrightarrow \bar{x} \\ \Longrightarrow \quad f(x_n) \xrightarrow[n \to +\infty]{} f(\bar{x}) \end{cases}$

(senza prova)



$f(x_0)$
$f(x)$
$x \to x_0$
x_0



$f(x_n)$
$f(x_0)$
$f(x_4)$
$f(x_2)$
$f(x_1)$
x_1 x_2 x_3 x_4 $\to$
X_0
x_n