14. Ottobre. 2021

DEF.: (limite infinito)

$(a_n)_n$

- Si dice che $\lim\limits_{n \to +\infty} a_n = +\infty$ se

$$\forall K > 0, \ \exists \bar{n} = \bar{n}(K) \in \mathbb{N} : \forall n \geq \bar{n} :$$
$$a_n \geq K$$

- Si dice che $\lim\limits_{n \to +\infty} a_n = -\infty$ se

$$\forall K > 0, \ \exists \bar{n} = \bar{n}(K) \in \mathbb{N} : \forall n \geq \bar{n} :$$
$$a_n \leq -K$$

In entrambi i casi si dirà che $(a_n)_n$ è DIVERGENTE

$$a_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} +\infty \ , \quad b_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} -\infty$$

$\forall K > 0$

se $n \geq \bar{n}$

$$\lim_{n \to +\infty} a_n = +\infty$$

$\forall K > 0$

se $n \geq \bar{n}$

$$\lim_{n \to +\infty} b_n = -\infty$$

Esempio:

$$\lim_{n\to+\infty} n^2 = +\infty$$

(Prova:

$K>0$: $\quad n^2 > K \iff$ $\cancel{n < -\sqrt{K}}$ oppure $n > \sqrt{K}$

scegliamo $\quad \bar{n} = [\sqrt{K}]+1$

Allora:

$$n \geq \bar{n} = [\sqrt{K}]+1 > \sqrt{K} \implies n^2 > K$$)

Oss.: Se una successione $(a_n)_n$ ha limite, allora esso è unico!

Oss.:

Ci sono successioni che non hanno limite (cioè non sono né convergenti né divergenti)

- $a_n = (-1)^n$

$a_0 = 1 \quad a_1 = -1 \quad a_2 = 1 \quad a_3 = -1 \quad \dots$

La successione è limitata ma non si avvicina a nessun numero, in quanto oscilla.

- $a_n = (-1)^n \cdot n$

Non è limitata, ma non tende né a $+\infty$ né a $-\infty$.

Oss.: Se esiste il limite di una successione, esso è unico!

TEOREMA (Algebra dei limiti)

$(a_n)_n$, $(b_n)_n$ successioni

$a_n \longrightarrow \ell_1$, $b_n \longrightarrow \ell_2$

dove $\ell_1, \ell_2 \in$ "$\mathbb{R} \cup \{+\infty\} \cup \{-\infty\}$"

Allora:

$$a_n + b_n \longrightarrow \begin{cases} \ell_1 + \ell_2 & \text{se } \ell_1, \ell_2 \in \mathbb{R} \\ +\infty & \text{se } \ell_1 = +\infty,\ \ell_2 \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\} \\ & (\ell_1 \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\},\ \ell_2 = +\infty) \\ -\infty & \text{se } \ell_1 = -\infty,\ \ell_2 \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\} \\ & (\ell_1 \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\},\ \ell_2 = -\infty) \end{cases}$$

$+\infty - \infty$ = forma indeterminata

$-\infty + \infty$

$$a_n \cdot b_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} \begin{cases} \ell_1 \cdot \ell_2 & \text{se } \ell_1, \ell_2 \in \mathbb{R} \\[2ex] +\infty & \text{se } \ell_1 = +\infty \\ & \text{e } \underset{\neq 0}{\ell_2} \in \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\} \\[2ex] +\infty & \text{se } \ell_1 = -\infty \\ & \text{e } \underset{\neq 0}{\ell_2} \in \mathbb{R}_- \cup \{-\infty\} \\[2ex] -\infty & \text{se } \ell_1 = +\infty \\ & \text{e } \underset{\neq 0}{\ell_2} \in \mathbb{R}_- \cup \{-\infty\} \\[2ex] -\infty & \text{se } \ell_1 = -\infty \\ & \text{e } \underset{\neq 0}{\ell_2} \in \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\} \\[2ex] \text{stessi risultati se si} & \\ \text{scambiano } \ell_1 \text{ e } \ell_2 & \end{cases}$$

$0 \cdot (\pm\infty)$ forma indeterminata

Se $b_n \neq 0 \quad \forall n$:

$$\frac{a_n}{b_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{l_1}{l_2} \quad \text{se } l_1, l_2 \in \mathbb{R},\ l_2 \neq 0$$

$+\infty$ se $l_1 = +\infty$, $l_2 > 0$ | $l_1 = -\infty$, $l_2 < 0$

$-\infty$ se $l_1 = -\infty$, $l_2 > 0$ | $l_1 = +\infty$, $l_2 < 0$

0 se $l_1 \in \mathbb{R}$, e $l_2 = \pm\infty$

$\frac{l}{0}$ forma indeterminata $\quad \frac{+\infty}{-\infty}$, $\frac{-\infty}{-\infty}$, $\frac{+\infty}{+\infty}$, $\frac{-\infty}{+\infty}$

Nota:

le espressioni che coinvolgono i simboli $+\infty$ e $-\infty$ sono solo espressioni formali.
Non hanno un valore matematico!
Ad es.: $+\infty+\infty$, $0\cdot+\infty$, $1\cdot+\infty$ ...

Le espressioni del tipo ($+\infty-\infty$, $-\infty+\infty$, $0\cdot(+\infty)$, $0\cdot(-\infty)$, ...) si dicono forme indeterminate perché corrispondono a situazioni non univoche, ossia situazioni il cui risultato deve essere studiato caso per caso.

Esempio:

la forma indeterminata $0 \cdot (+\infty)$

1. $a_n = \frac{1}{n} \longrightarrow 0$, $b_n = n^2 \longrightarrow +\infty$

$$\boxed{a_n \cdot b_n} = \frac{1}{n} \cdot n^2 = n \longrightarrow \boxed{+\infty}$$

2. $a_n = \frac{1}{n^2} \longrightarrow 0$, $b_n = n \longrightarrow +\infty$

$$\boxed{a_n \cdot b_n} = \frac{1}{n^2} \cdot n = \frac{1}{n} \longrightarrow \boxed{0}$$

3. $a_n = \frac{1}{n} \longrightarrow 0$, $b_n = 2n \longrightarrow +\infty$

$$\boxed{a_n \cdot b_n} = \frac{1}{n} \cdot 2n = 2 \longrightarrow \boxed{2}$$

4 $a_n = \frac{(-1)^n}{n} \longrightarrow 0 \quad , \quad b_n = n^2 \longrightarrow +\infty$

$$a_n \cdot b_n = \frac{(-1)^n}{n} \cdot n^2 = (-1)^n \cdot n \not\longrightarrow$$

non ha limite!

$0 \;,\; -1 \;,\; 2 \;,\; -3 \;,\; 4 \;,\; -5 \;,\; 6 \;,\; -7$

$8 \;,\; -9 \;,\; 10 \;,\; -11 \;,\; \ldots$

Esempi:

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{c}{n} = \lim_{n\to+\infty} c \cdot \frac{1}{n} = 0$$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n^2} = \lim_{n\to+\infty} \underset{\substack{\downarrow \\ 0}}{\frac{1}{n}} \cdot \underset{\substack{\downarrow \\ 0}}{\frac{1}{n}} = 0$$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n^3} = \lim_{n\to+\infty} \underset{\substack{\downarrow \\ 0}}{\frac{1}{n^2}} \cdot \underset{\substack{\downarrow \\ 0}}{\frac{1}{n}} = 0$$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n^d} = 0 \qquad (d \in \mathbb{N}^*)$$

$$\lim_{n\to+\infty} n^3 = \lim_{n\to+\infty} \underbrace{n^2}_{\to +\infty} \cdot \underbrace{n}_{\to +\infty} = +\infty$$

$$\lim_{n\to+\infty} n^4 = \lim n^3 \cdot n = +\infty$$

$$\lim_{n\to+\infty} n^d = +\infty \qquad (d \in \mathbb{N})$$

Esempi:

$$\lim_{n \to +\infty} n^4 - 3n^3 - n = ?$$

$$n^4 - 3n^3 - n = \underbrace{n^4}_{\to +\infty} \underbrace{\left(1 - \frac{3}{n} - \frac{1}{n^3}\right)}_{\to 1}$$

$$\frac{3}{n} \to 0 \qquad \frac{1}{n^3} \to 0$$

$$\lim_{n \to +\infty} n^4 - 3n^3 - n = +\infty$$

$$n^4 - 3n^3 - n =$$

$$= n\,(n^3 - 3n^2 - 1)$$

$n \to +\infty$ $n^3 \to +\infty$ $3n^2 \to +\infty$

$n^3 - 3n^2 - 1 \to +\infty - \infty$

$$\lim_{n\to+\infty} \boxed{n^5 - 2n^6 + n^4} = -\infty$$

$$= n^6 \left(\frac{1}{n} - 2 + \frac{1}{n^2} \right)$$

$n^6 \to +\infty$

$\left(\frac{1}{n} - 2 + \frac{1}{n^2} \right) \to -2$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{3n^2 - 4n^4}{6n^4 - n^3 - 10} = -\frac{2}{3}$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \frac{n^4}{n^4} \cdot \frac{\frac{3}{n^2} - 4}{6 - \frac{1}{n} - \frac{10}{n^4}}$$

$\frac{n^4}{n^4} = 1$

$\to \frac{-4}{6} = -\frac{2}{3}$

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{7n^6 - 5n^4 - 16n^5}{-4n^4 + 10n} =$$

$$= \lim_{n \to +\infty} \frac{n^6}{n^4} \cdot \boxed{\frac{7 - \frac{5}{n^2} - \frac{16}{n}}{-4 + \frac{10}{n^3}}} = -\infty$$

$$\frac{n^6}{n^4} = n^2 \to +\infty$$

$$\frac{7 - \frac{5}{n^2} - \frac{16}{n}}{-4 + \frac{10}{n^3}} \to \frac{7}{-4} = -\frac{7}{4}$$

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{3n^4 - 5n^2 + n}{8n^2 - 2n^8 + 1} = 0$$

$$= \lim \frac{n^4}{n^8} \cdot \boxed{\frac{3 - \frac{5}{n^2} + \frac{1}{n^3}}{\frac{8}{n^6} - 2 + \frac{1}{n^8}}}$$

$$\frac{n^4}{n^8} = \frac{1}{n^4} \to 0$$

$$\frac{3 - \frac{5}{n^2} + \frac{1}{n^3}}{\frac{8}{n^6} - 2 + \frac{1}{n^8}} \to \frac{3}{-2} = -\frac{3}{2}$$

Introduciamo ora una classe speciale di successioni.

LE SUCCESSIONI MONOTONE:

DEF.: $(a_n)_n$ si dice (STRETT.) CRESCENTE se:

$$\forall n \in \mathbb{N}: \quad a_n \le a_{n+1} \quad (<) \qquad (a_n \nearrow)$$

$(b_n)_n$ si dice (STRETT.) DECRESCENTE se:

$$\forall n \in \mathbb{N}: \quad b_n \ge b_{n+1} \quad (>) \qquad (b_n \searrow)$$

Una successione crescente o decrescente si dice MONOTONA.

Esempio:

$a_n = \frac{1}{n}$ è decrescente

$b_n = n^2$ è crescente

Una proprietà importante delle successioni monotone è che esse hanno sempre limite, ossia sono sempre convergenti o divergenti.

TEOREMA:

Se $(a_n)_n$ è crescente, allora:

$$\lim_{n \to +\infty} a_n = \sup \{ a_n \mid n \in \mathbb{N} \}$$

Se $(a_n)_n$ è decrescente, allora:

$$\lim_{n \to +\infty} a_n = \inf \{ a_n \mid n \in \mathbb{N} \}$$

DIM.:

Dimostriamo il teorema nell'ipotesi che $(a_n)_n \nearrow$.
Si tratta di provare che:

$$\lim_{n \to +\infty} a_n = \sup \{ a_n \mid n \in \mathbb{N} \}$$

Posto $L := \sup \{ a_n \mid n \in \mathbb{N} \}$
Vi sono due casi: $L = +\infty$, $L \in \mathbb{R}$.

(I) $L = +\infty$:
Si tratta di provare che:

$$\lim_{n \to +\infty} a_n = +\infty \quad , \quad \text{cioè}$$

$$\forall K > 0 : \ \exists \bar{n} \in \mathbb{N} : \ \forall n \geq \bar{n}$$

$$a_n \geq K$$

$$\forall K>0 : \quad \exists\, \bar n \in \mathbb{N} : \quad \forall\, n \geq \bar n \qquad \Big\} ?$$
$$a_n \geq K$$

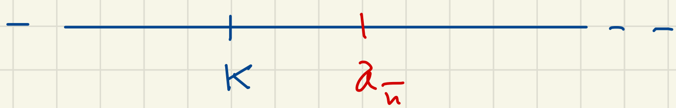
$L = +\infty \implies A$ non è sup. lim.

$\implies A$ non ammette maggioranti

$\implies K$ <u>non</u> è un maggiorante

di $A = \{ a_n \mid n \in \mathbb{N} \}$

$\implies \exists\, a_{\bar n} \in A : \quad a_{\bar n} > K$



Siccome $(a_n)_n \nearrow$, si ha:

$$\forall\, n \geq \bar n : \qquad a_n \geq a_{\bar n} > K$$

c.v.d.

I

II $L \in \mathbb{R}$:

Si tratta di provare che:

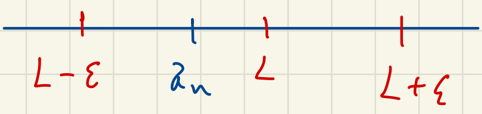
$$\lim_{n \to +\infty} a_n = L \quad , \quad \text{cioè:}$$

$$\forall \varepsilon > 0 : \quad \exists \bar{n} \in \mathbb{N} : \quad \forall n \geq \bar{n} :$$

$$|a_n - L| < \varepsilon$$

$$\Updownarrow$$

$$L - \varepsilon < a_n < L + \varepsilon$$



è **automatica** poiché $L = \sup\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$

$\Rightarrow$ L è un maggiorante di $\{a_n\}_n$

$\Rightarrow$ $\forall n : \quad a_n \leq L < L + \varepsilon$

Si tratta di trovare $\bar{n}$ t.c.:

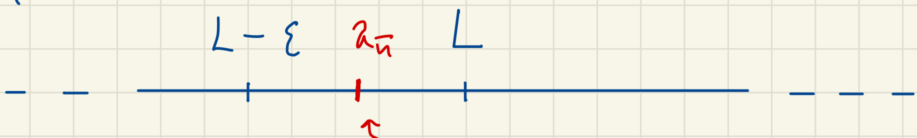
$\forall n \geq \bar{n}$:

$$a_{\bar{n}} > L - \varepsilon$$

Usiamo nuovamente il fatto che:

$$L = \sup \underbrace{\boxed{\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}}}_{= A}$$

L è il più piccolo dei magg. di A



$\Longrightarrow$ $L - \varepsilon$ non è un magg. di A

$\Longrightarrow$ $\exists\, a_{\bar{n}} \in A$: $\quad L - \varepsilon < a_{\bar{n}}$

Inoltre $(a_n) \nearrow$, quindi: $\forall n \geq \bar{n}$

$$L - \varepsilon < a_{\bar{n}} \leq a_n$$

Si è così provato che:

$\forall\, n \geq \bar{n}$:

$$L - \varepsilon \leq a_n \leq L + \varepsilon$$

c.v.d.

Rimane da provare il teorema se $(a_n)_n$ è DECRESCENTE

(Esercizio da fare!)

$$a_n = \begin{cases} 5 & \text{se } n \text{ è dispari} \\ 5 - \frac{1}{n} & \text{se } n \text{ è pari} \end{cases}$$

$a_1 = 5$

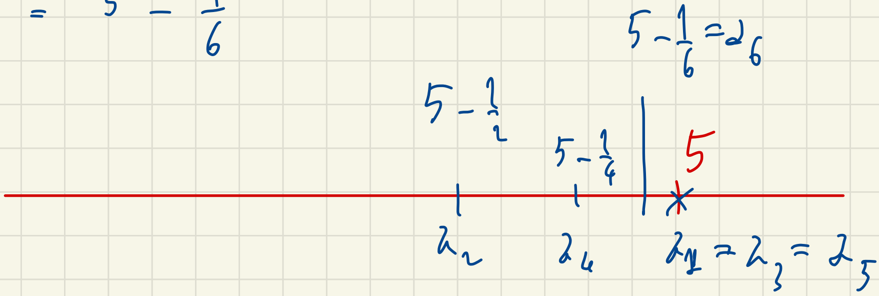
$a_2 = 5 - \frac{1}{2}$

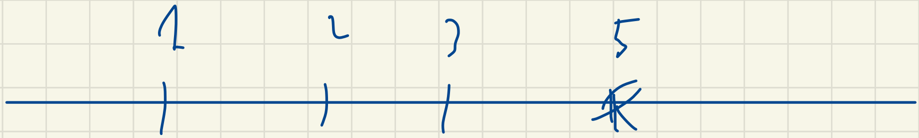
$a_3 = 5$

$a_4 = 5 - \frac{1}{4}$

$a_5 = 5$

$a_6 = 5 - \frac{1}{6}$




1
2
3
5

COROLLARIO :

1

$(a_n)_n \nearrow$, $(a_n)_n$ è sup. limitata

(cioè : $\exists\, c > 0$:

$a_n \leq c \quad \forall n$)

Allora :

$(a_n)_n$ è convergente , cioè :

$\exists\, r \in \mathbb{R}$:

$$a_n \longrightarrow r$$

2

$(a_n)_n \searrow$, $(a_n)_n$ è inf. limitata

(cioè : $\exists\, c > 0$:

$a_n \geq c \quad \forall n$)

Allora :

$(a_n)_n$ è convergente , cioè :

$\exists\, r \in \mathbb{R}$:

$$a_n \longrightarrow r$$

IL NUMERO "e" DI NEPER : DI EULER

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \quad , \quad n \in \mathbb{N}^*$$

$$a_1 = 2$$

$$a_2 = \left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{9}{4} = 2,25$$

$$a_3 = \left(\frac{4}{3}\right)^3 = \frac{64}{27} = 2,\overline{370}$$

$$a_4 = \left(\frac{5}{4}\right)^4 = \frac{625}{256} = 2,4414\ldots$$

$$\vdots$$

TEOREMA:

$\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ è convergente

cioè:

$$\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e \in \mathbb{R}$$

numero di Neper

(di Euler)

DIM.:

Si usa il corollario precedente, provando che:

1. $a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ è (strett.) crescente

2. a_n è limitata

Iniziamo da 1.
A tal fine sarà utile la disuguaglianza di Bernoulli:

$\forall x \in \mathbb{R}: x \geq -1, \forall n \in \mathbb{N}:$

$$(1+x)^n \geq 1+nx$$

(si proverà in seguito, usando il principio di induzione)

Dimostriamo che $a_n \nearrow$

Faremo vedere che:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} > 1$$

Proviamolo:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} =$$

$$= \frac{\left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{n+1}}{\left(\frac{n+1}{n}\right)^n} = \frac{n+2}{n+1} \cdot \frac{\left(\frac{n+2}{n+1}\right)^n}{\left(\frac{n+1}{n}\right)^n} =$$

$$= \frac{n+2}{n+1} \cdot \left(\frac{n+2}{n+1} \cdot \frac{n}{n+1}\right)^n =$$

$$= \frac{n+2}{n+1} \cdot \left(\frac{n^2+2n}{n^2+2n+1}\right)^n =$$

$$= \frac{n+2}{n+1} \cdot \left(\frac{n^2+2n+1-1}{n^2+2n+1}\right)^n =$$

$$= \frac{n+2}{n+1} \cdot \left(\frac{n^2+2n+1 \ -1}{n^2+2n+1} \right)^n =$$

$$= \frac{n+2}{n+1} \cdot \left(1 - \frac{1}{n^2+2n+1} \right)^n$$

$$= \frac{n+2}{n+1} \cdot \underbrace{\left(1 + \left(- \frac{1}{n^2+2n+1} \right) \right)^n}$$

$$\geq$$

DISUG. DI BERNOULLI

$$1 + n \left(- \frac{1}{n^2+2n+1} \right)$$

(vedi slide) $\to$

$$\geq \frac{n+2}{n+1} \cdot \left(1 - \frac{n}{n^2+2n+1} \right) =$$

$$= \frac{n+2}{n+1} \cdot \frac{n^2+2n+1-n}{n^2+2n+1} =$$

$$= \frac{n+2}{n+1} \cdot \frac{n^2+n+1}{n^2+2n+1} =$$

$$X = -\frac{1}{n^2+2n+1} \overset{!}{\geq} -1$$

$$\frac{1}{n^2+2n+1} \leq 1$$

$$\cancel{1} \leq n^2+2n+\cancel{1}$$

$$0 \leq n^2+2n \qquad \checkmark$$

$$= \frac{n+2}{n+1} \cdot \frac{n^2+n+1}{n^2+2n+1} =$$

$$= \frac{n^3+n^2+n+2n^2+2n+2}{n^3+3n^2+3n+1} =$$

$$= \frac{n^3+3n^2+3n+2}{n^3+3n^2+3n+1} =$$

$$= \frac{n^3+3n^2+3n+1+1}{n^3+3n^2+3n+1} =$$

$$= 1 + \frac{1}{n^3+3n^2+3n+1} > 1$$

$$\Longrightarrow \frac{a_{n+1}}{a_n} > 1$$

$$\Longrightarrow a_{n+1} > a_n \qquad \forall n$$

$$(a_n)_n \nearrow$$

② Proviamo che $(a_n)_n$ è limitata.

Usiamo il binomio di Newton:

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 1^{n-k} \cdot \left(\frac{1}{n}\right)^k =$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{1}{n^k} =$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{(n-k)!\,k!} \frac{1}{n^k} =$$

$$\frac{n!}{(n-k)!} = \underbrace{n\cdot(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-(k-1))}_{\text{sono } k \text{ fattori}}$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \frac{n\cdot(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-(k-1))}{n^k} \cdot \frac{1}{k!}$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \frac{n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-(k-1))}{n^k} \cdot \frac{1}{k!}$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \underbrace{\frac{n}{n}}_{\le 1} \cdot \underbrace{\frac{n-1}{n}}_{\le 1} \cdot \ldots \cdot \underbrace{\frac{n-(k-1)}{n}}_{\le 1} \cdot \frac{1}{k!}$$

(*)
vedi seguito

$$\le \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} = 1 + 1 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k!}$$

(*)

$$\frac{n}{n} \cdot \frac{n-1}{n} \cdot \ldots \cdot \frac{n-(k-1)}{n} \leq 1$$

moltiplico ambo i membri per $\frac{1}{k!}$

$$\frac{n}{n} \cdot \frac{n-1}{n} \cdot \ldots \cdot \frac{n-(k-1)}{n} \cdot \frac{1}{k!} \leq \frac{1}{k!}$$

Oss.:

$$k! = k \cdot (k-1) \cdot (k-2) \cdot \ldots \cdot 1 \geq k \cdot \underset{\overset{\vee}{0}}{(k-1)}$$

se $k \geq 2$

$$\Longrightarrow \quad k! \geq k(k-1)$$

$$\Longrightarrow \quad \frac{1}{k!} \leq \frac{1}{k(k-1)} = \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}$$

$$\frac{\cancel{k} - (\cancel{k} - 1)}{(k-1) \cdot k}$$

$$= 1 + 1 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k!}$$

Usiamo $\frac{1}{k!} \leq \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}$

$$\leq 2 + \sum_{k=2}^{n} \left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k} \right) =$$

$$= 2 + \left[\left(1 - \frac{1}{2} \right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4} \right) + \right.$$

$$+ \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{5} \right) + \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{6} \right) +$$

$$\left. + \dots + \left(\frac{1}{n-2} - \frac{1}{n-1} \right) + \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} \right) \right]$$

$$\leq 2 + 1 - \frac{1}{n} = 3 - \frac{1}{n} < 3$$

In conclusione si è provato che:

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < 3 \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

Dunque:

$$(a_n)_n \nearrow \quad \text{e} \quad \text{sup. limitata}$$

Dal corollario:

$$\exists \lim_n \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$$

Inoltre:

$$2 = a_1 < e \leq 3$$

Si può dimostrare che

$$e \notin \mathbb{Q}$$