11 Ottobre 2021

Vedremo ora come la proprietà di completezza di $\mathbb{R}$ garantisca che i punti della retta (esclusi quando si era in $\mathbb{Q}$) siano ~~raggiunti~~ da un numero reale.

Limitiamoci alle radici.

TEOREMA: (Esistenza e unicità della radice n-esima)

$\forall a \in \mathbb{R}_+$, $\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$,

$\exists!\, b \in \mathbb{R}_+ : b^n = a$

(b si dice radice aritmetica n-esima di a e si scrive

$\sqrt[n]{a} := b$, $\sqrt{a} := b$ se $n=2$)

OSS.: la radice aritmetica è un numero ≥ 0.

$\sqrt{4} = 2$ ($\sqrt{4}$ non è -2 !!)

$\sqrt{81} = 9$

Dimostreremo il teorema precedente nel caso $n=2$.

TEOREMA: (Esistenza e unicità della radice)

$\forall a \in \mathbb{R}_+$

$$\exists ! \, b \in \mathbb{R}_+ : b^2 = a$$

(si scrive $\sqrt{a} := b$)

Per dimostrare tale teorema è necessario un lemma preliminare.

LEMMA:

$\forall\, x, y \in \mathbb{R} : \quad x, y \geq 0$

si ha:

(A) $x^2 \leq y^2 \iff x \leq y$

(B) $x^2 \geq y^2 \iff x \geq y$

(C) $x^2 = y^2 \iff x = y$

(D) $x^2 < y \implies \exists\, \varepsilon > 0 : \ (x+\varepsilon)^2 < y$

(E) $x^2 > y \implies \exists\, \varepsilon > 0 : \ (x-\varepsilon)^2 > y$

(nota: $x > 0$)

DIM.:

Attenzione! Nella prova non si può usare la radice quadrata

Ⓐ Possiamo supporre che $y > 0$ (altrimenti Ⓐ è ovvia)

$$x^2 \leq y^2$$

$$\Updownarrow$$

$$x^2 - y^2 \leq 0$$

$$\underbrace{(x-y)\underbrace{(x+y)}_{>0}}_{\text{"}}$$

dividendo ambo i membri della disequazione per $x+y$:

$$\Longleftrightarrow \quad x - y \leq 0 \quad \Longleftrightarrow \quad x \leq y$$

OSS.: Si può provare che: $n \in \mathbb{N}$

$$x^n \leq y^n \Longleftrightarrow x \leq y$$

(Esercizio)

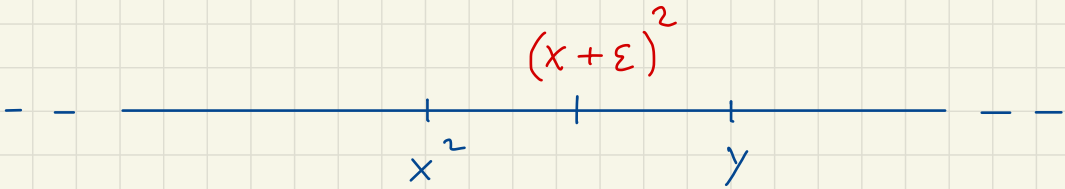
(B) Analogo ad (A)

(per esercizio)

(C) Segue da (A) e (B):

$$x^2 = y^2 \iff \begin{cases} x^2 \le y^2 \overset{(A)}{\iff} x \le y \\ x^2 \ge y^2 \overset{(B)}{\iff} x \ge y \end{cases} \iff x = y$$

(D) $x^2 < y \implies \exists\, \varepsilon > 0 : (x+\varepsilon)^2 < y$



scegliamo $0 < \varepsilon < 1$: $\varepsilon^2 < \varepsilon$

$$(x+\varepsilon)^2 = x^2 + 2\varepsilon x + \varepsilon^2 \le$$

$$\le x^2 + 2\varepsilon x + \varepsilon =$$

$$= x^2 + \varepsilon(2x+1) \overset{?}{<} y$$

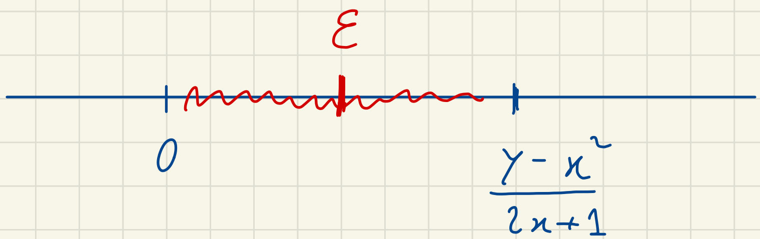
È possibile scegliere $0 < \varepsilon < 1$ in modo che valga ?

Vediamolo:

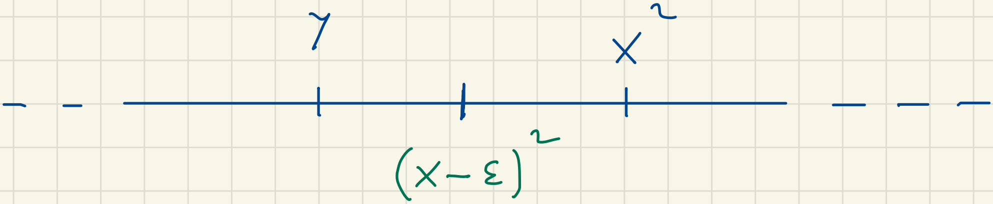
$$x^2 + \varepsilon(2x+1) \overset{?}{<} y$$

$$\varepsilon(2x+1) < y - x^2$$

$$\varepsilon < \frac{y - x^2 > 0}{2x+1 > 0}$$



(E) $x^2 > y \implies \exists\, \varepsilon > 0 : (x-\varepsilon)^2 > y$



$$(x-\varepsilon)^2 = x^2 - 2\varepsilon x + \varepsilon^2 \geq$$

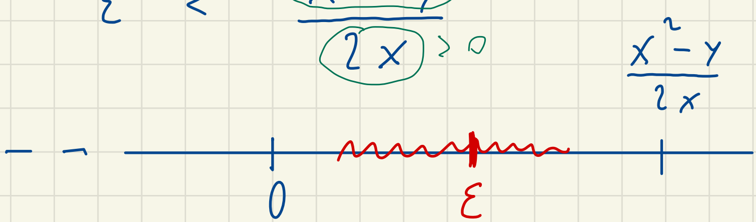
$$\geq x^2 - 2\varepsilon x \overset{?}{>} y$$

Possiamo scegliere $0 < \varepsilon$ in modo che valga ?

$$x^2 - 2\varepsilon x > y$$

$$2\varepsilon x < x^2 - y \qquad (x > 0)$$

$$\varepsilon < \frac{(x^2 - y)^{>0}}{(2x)^{>0}}$$



FINE!

Si può provare una versione generale del lemma precedente:

LEMMA (generale)

$\forall n \in \mathbb{N} : n > 0$

$\forall x, y \in \mathbb{R} : x, y \geq 0$

si ha:

(A) $x^n \leq y^n \iff x \leq y$

(B) $x^n \geq y^n \iff x \geq y$

(C) $x^n = y^n \iff x = y$

(Si dimostra in modo simile al precedente)

Torniamo alla prova del

TEOREMA: (Esistenza e unicità della radice)

$\forall a \in \mathbb{R}_+$

$\exists!\ b \in \mathbb{R}_+ : b^2 = a$

(si scrive $\sqrt{a} := b$)

DIM. (Teorema esist. della $\sqrt{\ }$):

Si sfrutta la proprietà di completezza.
Consideriamo l'insieme:

$$A = \{ c \in \mathbb{R} \mid c \geq 0, \quad c^2 \leq a \}$$

- $0 \in A \implies A \neq \emptyset$
- A è superiormente limitato:

$\forall c \in A$:

$$c^2 \leq a \leq (a+1) \leq (a+1)^2 \implies$$

$$\implies c^2 \leq (a+1)^2$$

da (A) Lemma $\implies c \leq a+1$
$\forall c \in A$

$a+1$ è un maggiorante di A

$\Longrightarrow$ A è sup. limitato

Dalla proprietà di completezza

$$\exists \sup A =: b \in \mathbb{R}_+$$

Dimostriamo che : $b^2 = a$

cosicché :

$$b = \sqrt{a}$$

Si procede per assurdo

mostrando che non può essere

$$b^2 < a \quad , \quad b^2 > a$$

Supponiamo che:

$b^2 < a$:

dal lemma D (con $x = b$, $y = a$)

$$\exists \varepsilon > 0 : \quad (b+\varepsilon)^2 < a$$

$$\Longrightarrow \quad b + \varepsilon \in A$$

$$\Longrightarrow \quad \cancel{b} + \varepsilon \leq \sup A = \cancel{b}$$

$$\Longrightarrow \quad \varepsilon \leq 0 \qquad \text{ASSURDO!}$$

$b^2 > a$:

dal lemma E (con $x = b$, $y = a$)

$\exists\, \varepsilon > 0 : \quad (b-\varepsilon)^2 > a$

$\Longrightarrow \quad \forall c \in A : \quad c^2 \leq a < (b-\varepsilon)^2$

$\Longrightarrow \quad c^2 \leq (b-\varepsilon)^2$

da A Lemma

$\Longrightarrow \quad c \leq b - \varepsilon \qquad \forall c \in A$

$\Longrightarrow$ $b - \varepsilon$ è un ~~mag~~ maggiorante di A

ma $b = \sup A$ è il più piccolo dei ~~mag~~ maggioranti di A

ASSURDO!

Dunque, deve essere

$$b^2 = a$$

Rimane da provare l'unicità della radice quadrata.

Supponiamo che $\exists\ b_1, b_2 \in \mathbb{R}_+$:

$$b_1^2 = a = b_2^2$$

$$\Longrightarrow \quad b_1^2 = b_2^2$$

Dal lemma C :

$$b_1 = b_2$$

FINE!

Quindi:

a differenza di $\mathbb{Q}$ in $\mathbb{R}$:

$$\forall a \in \mathbb{R}_+ : \exists \sqrt[n]{a} \in \mathbb{R}.$$

<u>Oss.</u>:

- $\sqrt[n]{a} \geq 0$
- $\sqrt{(-2)^2} = \sqrt{4} = 2 \neq -2$
- $\sqrt{x^2} = |x|$
- $\sqrt[2n]{x^{2n}} = |x|$

$$3^{\frac{5}{11}} = \sqrt[11]{3^5} = \left(\sqrt[11]{3}\right)^5$$

$$3^{\sqrt{2}} = ?$$

SUCCESSIONI NUMERICHE:

DEF.: (Successione di numeri)
Una successione di numeri reali è una funzione:

$$f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$n \longmapsto f(n) =: a_n$$

$f(0) = a_0$ I elemento

$f(1) = a_1$ II elemento

$f(2) = a_2$ III elemento

$\vdots$ $\vdots$

Una successione si denota:

$$(a_n)_{n \in \mathbb{N}}, \quad (a_n)_n$$

Talvolta, può essere conveniente escludere $n=0$ dai valori del dominio: $\mathbb{N}^* = \mathbb{N} \setminus \{0\}$

Esempi:

$$a_n = \frac{n}{n+1}, \quad n \in \mathbb{N}$$

$$\begin{array}{lcccccccccccc} & 0, & \frac{1}{2}, & \frac{2}{3}, & \frac{3}{4}, & \frac{4}{5}, & \frac{5}{6}, & \dots \\ & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \\ \text{posiz.} & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & \end{array}$$

$$b_n = \frac{(-1)^n}{n}, \quad n \in \mathbb{N}^*$$

$$\begin{array}{lcccccc} & -1, & \frac{1}{2}, & -\frac{1}{3}, & \frac{1}{4}, & -\frac{1}{5}, & \dots \\ & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \\ \text{posiz.} & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & \end{array}$$

Non si deve confondere la successione $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$

$$
\begin{aligned}
f : \mathbb{N} &\longrightarrow \mathbb{R} \\
n &\longmapsto f(n) = a_n
\end{aligned}
$$

con l'insieme degli elementi che compongono:

$$
\begin{array}{l}
\mathrm{Im}\, f = \{ a_n \mid n \in \mathbb{N} \} \\
\;\;\;\;\, \| \\
f(\mathbb{N})
\end{array}
$$

Nella successione è prescritto l'ordine in cui compaiono gli elementi.

Es.:

$$a_n = (-1)^n$$

$$\begin{array}{ccccc} 1, & -1, & 1, & -1, & 1, \ \dots \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \end{array}$$

successione $\longrightarrow$ $\left((-1)^n\right)_n$

$\left((-1)^n\right)_{n \in \mathbb{N}}$

l'insieme degli elementi

della successione:

$$\{-1, 1\}$$

Es.:

$$a_n = \frac{1}{n}$$

$(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*} \longrightarrow$ c'è un ordine

$\left\{ 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \dots \right\}$ NON c'è un ordine!

$\left\{ \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, 1, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \dots \right\}$

DEF.:

$(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ successione

$$A = \{ a_n \mid n \in \mathbb{N} \}$$

$(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ si dice:

- SUPERIORMENTE LIMITATA se A è sup. limitato
- INFERIORMENTE LIMITATA se A è inf. limitato
- LIMITATA se A è limitato.

Esempi:

(1)

$$a_n = \frac{1}{n} \qquad n \in \mathbb{N}^*$$

$$0 < \frac{1}{n} \leq 1 \qquad \forall n$$

$\Rightarrow \quad (a_n)_n$ è LIMITATA

(2)

$$a_n = n^2 \quad , \quad n \in \mathbb{N}$$

$$n^2 \geq 0 \qquad \forall n$$

$(a_n)_n$ è INF. LIMITATA,

ma non SUP. LIMITATA

(3)

$$a_n = (-1)^n \cdot n$$

$(a_n)_n$ non è né INF. né

sup. limitata

LA NOZIONE DI LIMITE:

$$a_n = \frac{n-1}{n}$$

$$0, \quad \frac{1}{2}, \quad \frac{2}{3}, \quad \frac{3}{4}, \quad \frac{4}{5}, \quad \frac{5}{6}$$

$$\frac{1}{2} = 0{,}5 \quad \frac{2}{3} = 0{,}\overline{6} \quad \frac{3}{4} = 0{,}75 \quad \frac{4}{5} = 0{,}8 \quad \frac{5}{6} = 0{,}8\overline{3}$$

$$\frac{6}{7}, \quad \frac{7}{8}, \quad \frac{8}{9}, \quad \ldots, \quad \frac{20}{21}, \quad \ldots$$

$$\frac{6}{7} = 0{,}857 \quad \frac{7}{8} = 0{,}875 \quad \frac{8}{9} = 0{,}\overline{8} \quad \frac{20}{21} = 0{,}952\ldots$$

$$\ldots, \quad \frac{100}{101}, \quad \ldots, \quad \frac{1000}{1001}, \quad \ldots, \quad \frac{10'000}{10'001}$$

$$\frac{100}{101} = 0{,}990 \quad \frac{1000}{1001} = 0{,}9990 \quad \frac{10'000}{10'001} = 0{,}99990\ldots$$

$$a_n = \frac{n}{n+1} \xrightarrow[n]{} 1$$

Come si formalizza il fatto che

" a_n si avvicina indefinitamente a 1 ? "

$\underline{\text{DEF}}$: (limite finito)

$(a_n)_n$, $L \in \mathbb{R}$

Si dice che $\lim_{n \to +\infty} a_n = L$ se

$\forall \varepsilon > 0, \; \exists \bar{n} = \bar{n}(\varepsilon) \in \mathbb{N} : \forall n \geq \bar{n} :$

$|a_n - L| < \varepsilon \quad \left(L - \varepsilon < a_n < L + \varepsilon \right)$

$(a_n)_n$ si dice CONVERGENTE

Si scrive anche $a_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} \ell$

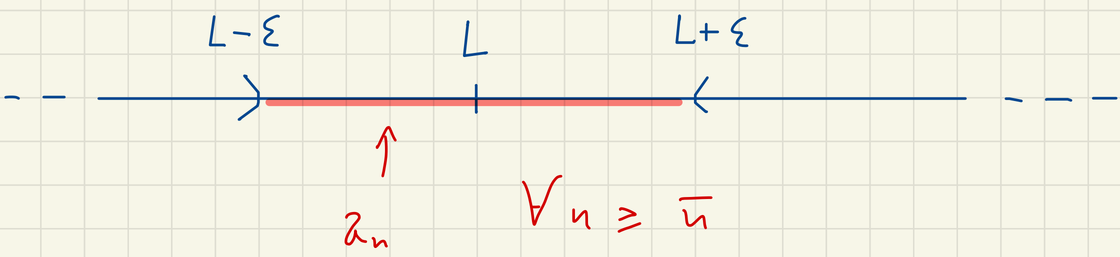
$$|a_n - L| < \varepsilon$$

$$\Updownarrow$$

$$-\varepsilon < a_n - L < \varepsilon$$

$$\Updownarrow$$

$$L - \varepsilon < a_n < L + \varepsilon$$



Vediamo l'esempio di prima:

$$a_n = \frac{n-1}{n} \qquad \ell = 1$$

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{n-1}{n} \overset{?}{=} 1$$

Fissato un $\varepsilon > 0$ arbitrario, posso trovare un $\bar{n} = \bar{n}(\varepsilon)$ in modo che: $\forall n \geq \bar{n}$

$$\left| \frac{n-1}{n} - 1 \right| < \varepsilon \quad ?$$

(Idea: più si desidera che $a_n = \frac{n}{n-1}$ sia vicino a 1 [ε piccolo] e più sarà necessario considerare le "posizioni alte" degli a_n [cioè, $\bar{n}$ dovrà essere grande]).

$$\left| \frac{n-1}{n} - 1 \right| < \varepsilon \qquad ?$$

n

$$\left| \frac{n-1-n}{n} \right| = \left| \frac{-1}{n} \right| = \frac{1}{n}$$

$$\frac{1}{n} < \varepsilon$$

Passando ai reciproci $(n>0)$:

$$n > \frac{1}{\varepsilon}$$

Si è così provato che:

$$\forall n \in \mathbb{N} : \quad n > \frac{1}{\varepsilon} \implies \left| \frac{n-1}{n} - 1 \right| < \varepsilon$$

$$\forall n \in \mathbb{N} : \quad n \geq \underbrace{\left[\frac{1}{\varepsilon}\right] + 1}_{= \bar{n}} \implies \left| \frac{n-1}{n} - 1 \right| < \varepsilon$$

(<u>Nota</u>: per precisione, se $\frac{1}{\varepsilon}$ non fosse un intero, possiamo scegliere:

$$\bar{n} = \left[\frac{1}{\varepsilon}\right] + 1 > \frac{1}{\varepsilon}$$

dove:

$$r \in \mathbb{R}$$

$$[r] := \max \{ m \in \mathbb{N} \mid m \leq r \}$$

= la parte intera di r

<u>Es.</u>:

$$\left[\frac{3}{2}\right] = [1,5] = 1$$

$$[2,99] = 2$$

)

Si è così provato che

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{n-1}{n} = 1$$

Ma come funziona operativamente la suddetta definizione?

$$\varepsilon = 0,1 = \frac{1}{10} \longrightarrow \bar{n} = \frac{1}{\varepsilon} + 1 = \frac{1}{\frac{1}{10}} + 1 = 11$$

$$n \geq \bar{n} = 11 \implies \left| \frac{n-1}{n} - 1 \right| < \frac{1}{10}$$

Ad esempio:

$$n = 12 \qquad a_{12} = \frac{11}{12} = 0,91\bar{6}$$

$$\left| \frac{11}{12} - 1 \right| = 0,08\bar{3} < \frac{1}{10} = 0,1$$

$$\boxed{\varepsilon = 0{,}01 = \frac{1}{100}} \rightsquigarrow \quad \bar{n} = \frac{1}{\left(\frac{1}{100}\right)} + 1 = 101$$

$$n \geq \bar{n} = 101 \implies \left| \frac{n-1}{n} - 1 \right| < \frac{1}{100}$$

Esempio:

$$n = 106 \qquad a_{106} = \frac{105}{106} \cong 0{,}9907$$

$$\left| \frac{105}{106} - 1 \right| \cong 0{,}0094 < 0{,}01 = \frac{1}{100}$$

$$\varepsilon = 0,0001 = \frac{1}{10^4} \longrightarrow \bar{n} = 10^4 + 1$$

$$n \geq \bar{n} = 10^4 + 1 \Longrightarrow \left| \frac{n-1}{n} - 1 \right| < \frac{1}{10^4}$$

<u>Esempio:</u>

$$n = 10.005$$

$$a_{10.005} = \frac{10.004}{10.005} = 0,99990005$$

$$\left| \frac{10.004}{10.005} - 1 \right| = 0,00009995 < 0,0001$$

. . . .

Esercizi:

Dimostrare che:

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$$ (uguale a prima)

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n^2} = 0$$

(SVOLGIMENTO :

$$\left| \frac{1}{n^2} - 0 \right| < \varepsilon$$

n

$$\frac{1}{n^2}$$

$$\frac{1}{n^2} < \varepsilon \iff n^2 > \frac{1}{\varepsilon}$$

$$\Updownarrow$$

$$\cancel{n < -\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}} \quad \text{oppure} \quad n > \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}$$

si sceglie $\bar{n} = \left[\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \right] + 1$:

$$n \geq \left[\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \right] + 1 > \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \implies \left| \frac{1}{n^2} - 0 \right| < \varepsilon \quad)$$